MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2022
Lista de exercícios VII

Observação: Nas questões envolvendo a obtenção de algum teste, você deve especificar as regiões do teste, a obtenção do(s) ponto(s) crítico(s), bem como calcular a função poder.

1. Resolva as questões deixadas em classe.

2. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 8.13, 8.15, 8.19, 8.23, 8.29, 8.31, 8.32, 8.33.

3. Para todos os modelos estatísticos vistos, e para cada um de seus parâmetros, digamos θ, (considerando os demais conhecidos), faça:

   a) Construa um teste, de tamanho α, esboçando sua função poder, para testar as seguintes hipóteses:
      - $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
      - $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.
      - $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
      - $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
      - $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.

   b) Repita o item a), se possível, obtendo o teste UMP.

4. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \theta > 0$$

   Responda os itens:

   a) Prove que a f.d.p. conjunta da amostra pertence à família exponencial e encontre uma estatística suficiente e completa.

   b) Encontre o e.m.v e o e.m.m de θ e calcule suas esperanças e variâncias.

c) Obtenha o teste UMP de nível de significância α para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$.
especificando sua região crítica.

5. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Mostre a inexistência ou encontre a região crítica do teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$.

b) Mostre a inexistência ou encontre a região crítica do teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses:
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta_0 > 0$.

6. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Encontre o e.m.v de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e sua respectiva distribuição assintótica.

b) Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, especificando sua região crítica.

7. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

a) Encontre o e.m.v de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e sua respectiva distribuição assintótica.

b) Obtenha o teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, especificando sua região crítica.

8. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\alpha) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

considere que $\beta > 0$ é **conhecido** e $\theta > 0$ é **desconhecido**. Obtenha o teste mais poderoso de nível α^* para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = 2\theta_0$.

9. Considere uma única observação de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2} \exp - (|x-\theta|) \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \theta > 0$$

   a) Encontre o teste mais podereso de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ em que $1 - \alpha >> 1/2$
   b) Considere o espaço dos testes mais poderesos de tamanho α, em que $1-\alpha >> 1/2$, para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta = 2$. Determine o elemento desse espaço, isto é, encontre o teste que minimiza a soma da P(Erro do tipo I) + P(Erro do tipo II).

10. Os itens a seguir são referentes as questões de 4) a 8), desta Lista. Você deve, com base nas informações dadas e nos testes UMP que você encontrou, calcular a estatística do teste e concluir se H_0 deve ou não ser rejeitada. Utilize as distribuições usuais, i.e, normal, t de student, qui-quadrado ou F. Calcule também o poder observado, com base na estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de interesse.

   (a) Questão 4, n = 30, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0,05$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 38,10$.
   (b) Questão 5, n = 20, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.01$, $\overline{x} = 3,90$.
   (c) Questão 6, n = 50, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.10$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+x_i) = 12,42$.
   (d) Questão 7, n = 15, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.01$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = -1,01$.
   (e) Questão 8, n = 45, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.05$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = 0,99$, $\beta = 4$.

11. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X $\sim$ beta(μ,1).

   a) Encontre o ENVUM de $1/\mu$.
   b) Adicionalmente, seja $Y_1, ..., Y_m$ uma amostra aleatória de $Y \sim$ beta$(\theta, 1)$, X e Y independentes. Obtenha um teste exato para testar $H_0 : \mu = \theta$ vs $H_1 : \mu \neq \theta$, com sua respectiva função poder.

12. Seja X uma observação da densidade,

$$f_x(x;\theta) = [2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta \in [0,1],$$

Responda:

a) Existe um teste mais poderoso de nível 0,2 para testar $H_0 : \theta = 1/2$ vs $H_1 : \theta = 3/4$?

b) Compare o teste encontrado no item a) com outro teste cuja região crítica é dada por $RC = \{x \in \mathcal{R} | 0,6 < x < 0,8\}$. Qual destes testes é melhor?

13. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 8.6, 8.7, 8.8.

14. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\beta^\alpha \mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta), \alpha,\beta > 0$$

considere β conhecido.

a) Obtenha um teste UMP para tester $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha > \alpha_0$.

b) Calcule a função poder do teste do item a).

c) Obtenha o TRV (teste da razão de verossimilhanças) para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$.

d) Calcule a função poder do teste do item c).

15. Considerando amostras aleatórias das distribuições a seguir, obtenha o teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Se possível, obtenha a distribuição exata da estatística do teste, caso contrário, obtenha a distribuição aproximada. Com a distribuição exata ou aproximada, calcule a função poder exata (ou aproximada) dos testes que você obteve.

a) $f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \theta > 0$

b) $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$

c) $f_X(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$

d) $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$

16. Resolva a Questão 10) considerando os testes da razão de verossimilhanças que você obteve na Questão 15).

17. Obtenha as fórmulas para os valores p (p-valor) dos testes que você obteve nesta Lista.

18. Seja X uma variável aleatória com f.d.p. $p_X(x;\theta) = P(X = x|\theta)$, dada por

$$
\begin{aligned}
p_X(x;\theta) &= \frac{\alpha}{2}\mathbb{1}_{\{-2,2\}}(x) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x) + \alpha I_{\{0\}}(x), \text{ se } \theta = 0 \\
p_X(x;\theta) &= \theta c \mathbb{1}_{\{-2\}}(x) + \left[\frac{1-c}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right]\mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x) + \\
&\quad \left[\alpha\left(\frac{1-c}{1-\alpha}\right)\right]\mathbb{1}_{\{0\}}(x) + (1-\theta)\, c\mathbb{1}_{\{2\}}(x), \text{se } 0 < \theta < 1
\end{aligned}
$$

em que α e c são constantes tais que $0 < \alpha < 1/2$ e $\alpha/(2-\alpha) < c < \alpha$. Responda os itens considerando uma única observação de X e as hipóteses $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta > 0$.

a) Encontre o teste da razão de verossimilhanças de tamanho α.

b) Mostre que o teste encontrada no item a) é inferior, em termos de poder, ao teste trivial $\phi(x) = \alpha$.

c) Encontre a função poder do teste $\phi^*(x) = 1$ se e somente se $x = 0$. Mostre que tal teste é superior ao TRV, em termos de poder, encontrado no item a).

d) Suponha que se queira testar $H_0' : \theta = 1/4$ vs $H_1' : \theta = 1/2$. Ache um teste UMP e encontre seu tamanho e poder.

19. Para todos os modelos estatísticos vistos, e para cada um de seus parâmetros, digamos θ, (considerando os demais conhecidos), encontre o intervalo de confiança unilateral uniformemente mais acurado, tanto à esquerda quanto à direita.