ME - 310 Probabilidade II
Segundo semestre de 2009
Lista de exercícios VI
Entrega: Exercícios 8 e 10 em 14/12/2009

1. Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma s.v.a (sequência de variáveis aleatórias) e r um número real positivo, tais que $\mathcal{E}(|X|^r) < \infty$ e $\mathcal{E}(|X_n|^r) < \infty$, $\forall n \geq 1$ (note que isso implica que os valores esperados em módulo existem $\forall k \leq r$. Dizemos que a sequência $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge em média de ordem r para X se $\mathcal{E}(|X_n - X|^r) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Notação $X_n \stackrel{m.r.}{\longrightarrow} X$. Responda aos itens:

   a) Se $X_n \stackrel{m.r.}{\longrightarrow} X$, então $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} X$.
   b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}(|X_n - X|^r) < \infty$, então $X_n \stackrel{q.c.}{\longrightarrow} X$.

2. Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $Cov(X_i, X_j) = 0$, $\forall i \neq j$ com variâncias uniformemente limitadas (i.e., existe uma constante $c > 0$, tal que $\mathcal{V}(X_n) \leq c, \forall n \geq 1$ e $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $\forall n \geq 1$. Prove que $\frac{S_n - \mathcal{E}(S_n)}{n} \stackrel{P}{\longrightarrow} 0$.

3. Seja $\{X_n\}_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade dadas por:

   $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\ln n}$ e $P(X_n = 0) = \frac{1}{\ln n}, \forall n \geq 2$.

   Prove que $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 0$ mas $X_n \stackrel{m.r.}{\not\longrightarrow} 0, \forall r > 0$.

4. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathcal{E}(X_n) = \mu$ e $\mathcal{V}(X_n) = \sigma^2, \sigma^2 > \infty$. Prove que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{n \sum_{j=1}^{n} X_j^2}} \stackrel{q.c.}{\longrightarrow} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}$$

   .

5. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes cujas distribuições de probabilidade são dadas por:

$$P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2}, n = 1, 2, ...$$

   Prove que, se $0 < \alpha < 1/2$, então $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j \stackrel{q.c.}{\longrightarrow} 0$.

6. Decida se a Lei dos Grandes Números (fraca e forte) vale para as sequências de variáveis aleatórias independentes $\{X_n\}_{n\geq 1}$, cujas distribuições de probabilidade são dadas por:

a) $P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2}$.

b) $P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$.

c) $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Considere n ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p $(0 < p < 1)$ em cada ensaio. Seja T_n o número de vezes dentre os n ensaios em que um sucesso é imediatamente seguido de um fracasso. Prove que $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{P} c$, onde c é uma constante. Identifique a constante c.

8. Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathcal{E}(X_n) = 0$ e $\mathcal{E}(X_n)^2 = 1$, $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes cujas distribuições de probabilidade são dadas por:

$$P(Y_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2} \text{ e } P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2},$$

e suponhamos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ seja independente de $\{Y_n\}_{n\geq 1}$. Seja $T_n = \sum_{j=1}^{n} (X_j + Y_j)$. Prove que:

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

9. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \sim \text{Binomial}(n,p)$, $0 < p < 1$. Se $T_n = \frac{X_n}{n}, \forall n \geq 1$.

a) Prove que $\sqrt{n}\,(T_n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p))$.

b) Determine o limite em distribuição de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{p}\right)$ e $\sqrt{n}\,(T_n(1-T_n) - p(1-p))$.

10. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma s.v.a, i.i.d., com $X_n \sim U[0,1]$. Ache o limite quase certo de:

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$

.

Sugestão: tome o logaritmo natural de Y_n.