ME - 210 B Probabilidade I
Primeiro semestre de 2010
Lista de exercícios VI

1. Considere a questão 2 da Prova I. Defina as seguintes variáveis aleatórias

   - X: o resultado da moeda
   - Y_i: o número de bolas azuis observadas se a urna i for sorteada, i =1,2.
   - Z: o número de bolas observadas no experimento em si.

   Responda os itens

   a) Encontre as distribuições de $XeY_i, i = 1, 2$.
   b) Calcule os valores esperados e as variâncias de cada uma das variáveis do item a).
   c) Encontre a distribuição de $Z|X = x$. Calcule $\mathcal{E}(Z|X = x)$ e $\mathcal{V}(Z|X = x)$
   d) Encontre a distribuição de Z.
   e) Calcule o valor esperado e a variância de Z pelas definições bem como utilizando a esperança e a variância condicional encontradas no item c). Os resultados são os mesmos? Isso é esperado?
   f) A distribuição que você encontrou no item d) coincide com aquela encontrada para a variável X na questão da Prova I? O resultado é esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

2. Seja o seguinte ve. a. trivariado $\boldsymbol{Z} = (X, Y, V)$, que apresenta a seguinte distribuição de probabilidade. Responda os itens.

		V			
		0		1	
		X			
		-1	1	-1	1
Y	-1	1/16	3/16	1/16	2/16
	0	2/16	2/16	3/16	2/16

a) De que tipo é o ve. $\boldsymbol{Z}$?

b) Calcule as distribuições marginais de X, Y e V.

c) Calcule as esperanças e variâncias de X, Y e V.

d) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y, X e V e Y e V.

e) As componentes do vetor $\boldsymbol{Z}$ são mutuamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

f) Existe algum par de variáveis aleatórias de $\boldsymbol{Z}$ que sejam mutuamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

g) Encontre a distribuição de $X|(Y = y, V = v)$.

h) Encontre a distribuição de $X|Y = y$ e $X|Z = z$.

3. Seja $\boldsymbol{Z} \sim Trinomial(n, p_1, p_2)$. Responda os itens:

a) Encontre a f.g.m. de $\boldsymbol{Z}$.

b) Encontre a f.g.m. de X e de Y.

c) Identifique a distribuição de X e de Y através de suas respectivas f.g.m.'s.

d) Calcule $Cov(X, Y)$ e $Corre(X, Y)$ utilizando a f.g.m de $\boldsymbol{Z}$.

4. Seja X uma v.a.c. com f.d.a F_X. Prove que $Y = F_X(X) \sim U(0, 1)$. Sugestão, ache a f.d.a de Y.

5. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição das seguintes variáveis aleatórias: $Y = |X|$, $Z = \exp(X)$ e $V = X^2$. Encontre a esperança e a variância de cada uma delas através das propriedades vistas em sala bem como através das distribuições que você encontrou.

6. **Aproximação da distribuição Binomial pela Normal**. Seja $X \sim Binomial(n,p)$. Sabe-se que $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1)$, se $n \to \infty$. Ou seja, a distribuição da Binomial pode ser aproximada pela distribuição normal, sob certas condições. Cacule as seguintes probabilidades: $P(X \leq 10)$, $P(X \geq 7)$ e $P(7 \leq X \leq 10)$ usando a distribuição de X e também a distribuição de Z, nos seguintes casos (sugestão: use um programa de computador de sua preferência):

   a) n= 15 , p =1/2.

   b) n = 30 , p = 1/2.

   c) n= 15 , p =2/3.

   d) n = 30 , p = 2/3.

   Em quais situações a aproximação se mostrou melhor? Tal resultado era esperado? Justifique adequamente sua resposta.

7. **Aproximação da distribuição Binomial pela Normal**. Seja $X \sim Binomial(n,p)$. Sabe-se que se $n \to \infty$ e $np \to \lambda$, então $X \approx Y$, $Y \sim Poisson(\lambda)$. Cacule as seguintes probabilidades: $P(X \geq 28)$, $P(X \leq 25)$ e $P(25 \leq X \leq 28)$, usando a distribuição de X e também a distribuição de Y, nos seguintes casos (sugestão: use um programa de computador de sua preferência):

   a) n= 30 , p =1/2.

   b) n = 30 , p = 1/2.

   c) n= 30 , p =1/5.

   d) n = 30 , p = 1/5.

   Em quais situações a aproximação se mostrou melhor? Tal resultado era esperado? Justifique adequamente sua resposta.