

MI - 402 Inferência Estatística  
Segundo semestre de 2019  
Lista de exercícios VI

Observação: Nas questões envolvendo obtenção de intervalos de confiança, considere um nível de confiança de  $\gamma, \gamma \in (0, 1)$ . A menos que se mencione o contrário, os intervalos solicitados são bilaterais.

1. Resolva as questões deixadas em sala de aula.
2. Para cada um dos modelos probabilísticos vistos (listas, aula, provas e mini-testes) encontre:
  - a) Ao menos uma quantidade pivotal ou conjunto de quantidades pivotais (corresponden ao número de parâmetros).
  - b) Ao menos um  $IC(\theta; \gamma)$  (para cada parâmetro).
  - c) Se possível, um IC de comprimento (comprimento esperado) mínimo, dentro da classe de IC's encontrada no item b).
3. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de X em que:

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \theta > 0.$$

Considere as hipóteses  $H_0 : \theta = 1$  vs  $H_1 : \theta \neq 1$ . Responda os itens:

- a) Obtenha as estatísticas da razão de verossimilhanças, de Wald e escore e suas respectivas distribuições assintóticas
  - b) Para  $n = 30$  e  $\bar{x} = 2,4$ , encontre o p-valor de cada uma das estatísticas obtidas no item a). Não use computador.
4. É realizado um experimento para comparar dois tipos de drogas no tratamento de certa doença (tempo de cura). A droga A é ministrada em  $n_a$  pacientes e a droga B a  $n_b$  pacientes. Os resultados podem ser considerados como sendo duas amostras aleatórias independentes de duas populações exponenciais (com a parametrização adotada em classe). Responda os itens:

- a) Encontre um intervalo de confiança exato de 90% para a razão entre os tempos médios de cura dos dois tratamentos.
- b) Encontre um intervalo de confiança assintótico de 90% para a diferença entre os tempos médios de cura dos dois tratamentos.
- c) Utilize os intervalos de confiança anteriores para mostrar como testar as hipóteses

$$H_0 : \theta_a = \theta_b \text{ vs } H_0 : \theta_a \neq \theta_b$$

ao nível de significância de 10%, em que  $\theta_a$  e  $\theta_b$  são os tempos médios de cura dos tratamentos A e B, respectivamente. Mostre também como calcular o p-valor para um dado resultado amostral.

5. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 9.3, 9.7, 9.9, 9.17.
6. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim N(\theta, \theta), \theta > 0$ . Dê um exemplo de quantidade pivotal e a use para encontrar um intervalo de confiança.
7. Considere as questões 3, 4, 5, 6 e 7 da Lista VI encontre quantidades pivotaes para os parâmetros desconhecidos. Com tais q.p.'s encontre intervalos de confiança.
8. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim Beta(\theta, 1)$ . Responda os itens:
  - a) Encontre uma quantidade pivotal para  $\theta$ .
  - b) Encontre um intervalo de confiança para  $\theta$  com base na q.p. encontrada no item a).
  - c) Encontre um intervalo de confiança assintótico para  $\theta^2$ .
9. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Responda os itens:
  - a) Considerando testes uniformemente mais poderosos para  $\mu$ , construa intervalos de confiança unilaterais uniformemente mais acurados (ICUUMA), à esquerda e à direita, para  $\mu$ . Considere  $\sigma^2$  conhecido.
  - b) Repita o item a) considerando  $\sigma^2$  desconhecido.
  - c) Considerando testes uniformemente mais poderosos para  $\sigma^2$ , construa intervalos de confiança unilaterais uniformemente mais acurados (ICUUMA), à esquerda e à direita, para  $\sigma^2$ . Considere  $\mu$  conhecido.
  - d) Repita o item b) considerando  $\mu$  desconhecido.

10. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da densidade exponencial com valor esperado  $\theta$ . Encontre o intervalo de confiança unilateral para  $\theta$  do tipo  $[0; T(X)]$  que seja Uniformemente Mais Acurado (UMA).
11. Seja uma  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$  em que  $F_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp\left(-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ . Considere  $\beta$  conhecido. Encontre uma quantidade pivotal para  $\alpha$  baseada em  $Y_n$  (máximo) e construa um IC para  $e^{-\alpha}$ .