ME - 310 Probabilidade II
Segundo semestre de 2009
Lista de exercícios V
Entrega: Exercícios 3 e 5 em 30/11/2009

1. **Seja X uma v.a com f.c ϕ_X. Mostre que:**

   a) $\phi_X(0) = 1$.

   b) $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi_X(t)|_{t=0} = i^k \mathcal{E}(X^k)$.

2. **Calcule a função característica ϕ_X das seguintes variáveis aleatórias:**

   a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   b) $X \sim$ **Poisson**(λ).

   c) $X \sim exp(\lambda)$.

   d) $X \sim Cauchy(\alpha, \beta)$.

   e) $X \sim$ **Gamma**(r, λ).

3. **Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \exp(\lambda)$ (na parametrização usada no nosso curso, ou seja $\mathcal{E}(X) = \lambda$). Defina $Y_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $Z_n = \frac{Y_n - \lambda}{\lambda/\sqrt{n}}$. Respondo os itens:**

   a) Calcule as f.c.'s de Y_n e Z_n.

   b) Prove que $\phi_{Z_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_Z$, em que $Z \sim N(0, 1)$, sem utilizar o T.C.L. provado em classe.

4. **Utilize funções características para provar que: se $X_n \stackrel{D}{\longrightarrow} N(0, 1)$ e $a_1, ..., a_n$ é uma sequência de números reais tal que $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, a um número finito, então $(X_n + a_n) \stackrel{D}{\longrightarrow} N(a, 1)$**

5. **Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.'s i.i.d., com $X_n \sim U[0, 1]$. Sejam $Y_n = min(X_1, ..., X_n)$ e $Z_n = max(X_1, ..., X_n)$, $U_n = nY_n$ e $V_n = n(1 - Z_n)$. Mostre que, quando $n \to \infty$:**

   a) $Y_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 0$ **e** $Z_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 1$.

   b) $U_n \stackrel{D}{\longrightarrow} W$ **e** $V_n \stackrel{D}{\longrightarrow} W$**, em que** $W \sim exp(1)$.

   Exercícios do Barry James

6. **Páginas 262 e 263, exercícios: 30, 32, 33, 34, 35**

7. **Página 218, exercícios: 2, 3, 4.**