ME - 210 B Probabilidade I
Primeiro semestre de 2010
Lista de exercícios V

1. Seja X uma v.a.c qualquer e F_X sua f.d.a. Prove que F_X satisfaz as três propriedades de uma legítima f.d.a.

2. Repita a questão 1) considerando agora que X é uma v.a.d.

3. Calcule a f.g.m da v.a. X em cada um dos casos abaixo. Calcule também a esperança e a variância a partir da respectiva f.g.m.

   a) $X \sim Bernoulli(p)$
   b) $X \sim Geometrica(p)$
   c) $X \sim exp(\lambda)$

4. Seja X uma v.a.d. . A função geradora de probabilidade (f.g.p.) de X, é definida como sendo $G(t) = \mathcal{E}(t^X)$, $\forall t \in (0, h)$, para algum $h > 1$. Prove que
$\frac{\partial^k G(t)}{\partial t^k}|_{t=1} = \mathcal{E}\left(\frac{X!}{(X-k)!}\right)$

5. Calcule a f.g.p da v.a. X em cada um dos casos abaixo. Calcule também a esperança e a variância a partir da respectiva f.g.p.

   a) $X \sim Bernoulli(p)$
   b) $X \sim Geometrica(p)$
   c) $X \sim Poisson(\lambda)$.

6. Prove que a função abaixo é uma legítima f.d.a bivariada:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(\frac{x^2y+xy^2}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + \left(\frac{y+y^2}{2}\right)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \\ &+ \left(\frac{x^2+x}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y) \end{aligned}$$

7. Considere o vetor aleatório $\boldsymbol{Z} = (X, Y)$, cuja f.d.p conjunta é dada pela tabela abaixo. Responda os itens.

		X		
		-1	0	1
Y	0	1/18	2/18	1/18
	1	4/18	1/18	2/18
	2	2/18	4/18	1/18

a) De que tipo é o ve. $\boldsymbol{Z}$?

b) Calcule as distribuições marginais de X e Y.

c) Calcule as esperanças e variâncias de X e Y.

d) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

e) X e Y são probabilisticamente independentes? Justifique sua resposta adequadamente.

8. Sejam X e Y duas v.a.'s independentes, tais que $X \sim G(p)$ e $Y \sim G(p)$, $p \in (0,1)$. Defina Z = X + Y.

   a) Calcule a f.d.p. conjunta de (Z,X) e de (Z,Y) .

   b) Qual a distribuição de $X|Z$ e de $Y|Z$. Como você interpreta os resultados que você encontrou ?

9. Sejam (X,Y) um vetor aleatório com f.d.a conjunta $F_{(X,Y)}$ e f.d.a's marginais F_X e F_Y, respectivamente. Prove que

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{(X,Y)}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$$

   Sugestão: Defina os conjuntos $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ e $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$ e analize $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

10. Seja (X,Y) um vetor aleatório com f.d.p. conjunta dada por:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = [1 - \alpha(1-2x)(1-2y)]\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y), \alpha \in [-1,1]$$

   a) Prove que $f_{(X,Y)}$ é de fato uma densidade bivariada.

   b) Calcule as densidades marginais de X e Y, suas esperanças e variâncias.

c) Calcule a covariância entre X e Y. Neste caso X e Y são independentes $\leftrightarrow$ são não-correlacionados? Justifique, adequadamente, sua resposta.

11. Sejam X,Y duas variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja Z uma outra variável aleatória. Mostre que:

$$Cov(X,Y) = E\left\{Cov[(X,Y)|Z]\right\} + Cov(E(X|Z), E(Y|Z)),$$

em que,

$$Cov[(X,Y)|Z] := E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$$

12. Exercícios do Sheldon Ross:

- Página 313 (problemas): 2, 8, 10, 20, 41.