ME - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2022
Lista de exercícios V

1. Resolver as questões deixadas em classe.

2. Casella, G. & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, exercícios: 7.15 (item a), 7.37, 7.38, 7.49 (itens a), b)).

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{ -\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$$

   Responda os itens:

   a) Considere μ conhecido. Encontre o $ENVUM$ de σ. Calcule sua respectiva variância.
   b) Considere σ conhecido. Encontre o $ENVUM$ de μ. Calcule sua respectiva variância.

4. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim FE_1(\theta)$ na sua forma canônica, de acordo com a parametrização descrita em classe. Responda aos itens:

   a) Prove que a e.m.v de θ, digamos $\widetilde{\theta}$, satisfaz a seguinte equação:

$$\widetilde{t}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{E}(\widetilde{t}(\boldsymbol{X}))$$

   em que $\widetilde{t}(\boldsymbol{x})$ se refere à estatística avaliada no ponto $\widetilde{\theta}$.
   b) Considerando a parametrização original, prove que $= c'(\theta)\left(t(\boldsymbol{x}) + \frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta)$. Assim, o $LICR(\tau(\theta))$ é atingido e então, existe algum estimador não viciado para $\tau(\theta) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}$ cuja variância coincide com esse limite (no caso, se $\mathcal{E}(t(\boldsymbol{X})) = \tau(\theta)$, $t(\boldsymbol{X})$, então este é o ENVUM).
   c) Prove que $T = t(\boldsymbol{X})$ é o ENVUM para $-\frac{d}{d\eta}(d_0(\boldsymbol{\eta}))$.

5. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de $X \sim U(0, \theta], \theta > 0$. Encontre o ENVUM de θ e calcule sua respectiva variância.

6. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{2x}{\beta^2 - \alpha^2}\mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \beta < \infty$$

Se $\alpha = 0$, prove que $\widehat{\beta} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right) Y_{(n)}$, em que $Y_n = max(X_1, ..., X_n)$, é o ENVUM de β. Calcule sua respectiva variância.

7. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X,

$$f_X(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Encontre uma estatística suficiente e completa para θ.
b) Encontre o LICR para $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.
c) Encontre o ENVUM de $\tau(\theta)$ e calcule sua respectiva variância.

8. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, X $\sim U\{1, 2, ..., \theta\}, \theta \in \mathcal{N}^*$. Prove que $\widehat{\theta} = \frac{Y_n^{n+1} - (Y_n - 1)^{n+1}}{Y_n^n - (Y_n - 1)^n}$ é o ENVUM de θ, em que $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$.

9. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{\ln(\theta)}{\theta - 1}\theta^x\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 1$$

Responda os itens

a) Encontre uma estatística suficiente e completa para θ.
b) Encontre $\tau(\theta)$ de sorte que o $LICR(\tau(\theta))$ seja atingido para algum e.n.v. de $\tau(\theta)$.
c) Calcule a variância do ENVUM que você encontrou no item b).

10. Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\beta^\alpha\mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$$

a) Obtenha uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$

b) Encontre os e.m.m de α e β.

c) Para β conhecido obtenha o e.m.v. de α. Calcule suas respectivas esperança e variância.

d) Para α conhecido obtenha o e.m.v. de β. Calcule suas respectivas esperança e variância.

e) Para β conhecido prove que a f.d.p. conjunta da amostra pertence à família exponencial.

f) Para β conhecido, encontre o ENVUM para $\tau(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ e calcule sua respectiva variância.

g) Para ambos os parâmetros desconhecidos, obtenha os e.m.v para α e β.

11. Para as distribuições constantes nas Listas 1, 2, 3 e 4 (atenção para não considerar a mesma distribuição mais de uma vez) :

    a) Compare, de forma apropriada, os EMM com os EMV.

    b) Obtenha o ENVUM, se possível, para o(s) parâmetro(s), e para pelo menos uma função definida por você, que seja de interesse.

    c) Compare o ENVUM com os estimadores obtidos no item a).

12. Para as distribuições constantes nas Listas 1, 2, 3 e 4 (atenção para não considerar a mesma distribuição mais de uma vez) encontre quantidades pivotais (q.p.) para os parâmetros desconhecidos. Com tais q.p.'s encontre intervalos de confiança. Obs: no caso discreto verifique se é possível obter o IC via aproximação de algum tipo, como no caso da Poisson.

13. Para as distribuições constantes nas Listas 1, 2, 3 e 4 (atenção para não considerar a mesma distribuição mais de uma vez) encontre intervalos de confiança, se possível, comm base na monotonicidade da respectiva fda em relação à cada um dos parâmetros.

14. Para as distribuições constantes nas Listas 1, 2, 3 e 4 (atenção para não considerar a mesma distribuição mais de uma vez) encontre intervalos de confiança assintóticos, baseados, se possível, na distribuição assintóticas dos emv's.