ME - 310 Probabilidade II
Segundo semestre de 2009
Lista de exercícios IV
Entrega: Exercícios 2, 5 e 7 em 09/11/2009

1. **Seja $X \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$. Responda os itens.**

   a) **Encontre uma quota superior para $P(X > \lambda^2)$.**

   b) **Prove que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} P(X > \lambda^2) = 0$, utilizando a quota que você encontrou no item a).**

2. **Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ com a parametrização adotada no curso. Responda os itens.**

   a) **Encontre um limite superior para $P(X > \lambda^2)$.**

   b) **Compare o limite que você encontrou com a f.d.s. de X no ponto λ^2. O resultado que você encontrou é coerente? Justifique adequadamente sua resposta.**

   c) **Seja $Y_n = min\{X_1, ..., X_n\}$. Encontre a f.d.a e f.d.p de Y_n. Sugestão: Lista III Questão 11.**

   d) **Encontre uma quota superior para $P(Y_n > n^2)$.**

   e) **Prove que $\lim\limits_{n \to \infty} P(Y_n > n^2) = 0$, utilizando a f.d.s de Y_n e a quota que você encontrou no item d). Os resultados coincidiram? Sua resposta era esperada? Justifique adequadamente sua resposta.**

3. **Seja (X, Y) um vetor aletório com distribuição normal multivariada de parâmetros $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.**

   a) **Encontre uma quota superior para $P(|X - Y| > |\mu_1 - \mu_2|)$.**

   b) **De acordo com a quota que você encontrou no item a), o que ocorre com $P(|X - Y| > |\mu_1 - \mu_2|)$, quando $|\mu_1 - \mu_2| \to \infty$? Tal resultado era esperado? Justifique cuidadosamente sua resposta.**

4. **Sejam $X_1, X_2, ...$ uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas, tais que $\mathcal{E}(X_i) = \mu$, $\mathcal{V}(X_i) = \sigma_i^2$ e $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$ é uma constante. Defina $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Prove que :**

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu|\right) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

5. **Sejam** $X_1, X_2, ...$ **uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas, tais que** $\mathcal{E}(X_i) = \mu$**,** $\mathcal{V}(X_i) = \sigma_i^2$ **e** $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \sigma^2$**,** $\sigma^2 > 0$ **é uma constante. Defina** $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$**. Prove que :**

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu|\right) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

6. **Sejam** $X_1, X_2, ...$ **uma seqüência de variáveis aleatórias, tais que** $\mathcal{E}(X_i) = \mu$**,** $\mathcal{V}(X_i) = \sigma^2$ **e** $Cov(X_i, X_j) = \psi; \forall i \neq j$**,** ψ **é uma constante. Defina** $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$**. Prove que :**

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu|\right) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

7. **Sejam** $X_1, X_2, ...$ **uma seqüência de variáveis aleatórias, tais que** $\mathcal{E}(X_i) = \mu$**,** $\mathcal{V}(X_i) = \sigma_i^2$ **e** $Cov(X_i, X_j) = \psi_{ij}; \psi_{ij} = \psi_{ji}, \forall i \neq j$**,** σ_i^2 **e** ψ_{ij} **são constantes,** $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \sigma^2$ **e** $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \psi$**,** σ^2 **e** ψ **são constantes. Defina** $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$**. Prove que :**

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu|\right) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

8. **Seja** X **uma v.a.,** $\mathcal{E}(X) = \mu$**,** $\mathcal{V}(X) = \sigma^2$**. Prove que,** $\forall a > 0$**:**

$$P\left(X \leq \mu - a\right) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$
$$P\left(X \leq \mu + a\right) \geq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

9. **Seja X uma v.a. qualquer, com f.g.m** $M_X(t)$ **conhecida. Prove que,** $\forall a$**:**

$$P\left(X \leq a\right) \leq e^{-ta} M_X(t), \forall t > 0$$
$$P\left(X \geq a\right) \leq e^{-ta} M_X(t), \forall t < 0$$