ME - 210 B Probabilidade I
Primeiro semestre de 2010
Lista de exercícios IV

1. Seja $X \sim Poisson(2)$, calcule as seguintes probabilidades:

   a) $P(X = 1)$
   b) $P(X \geq 5)$
   c) $P(X \leq 2)$
   d) $P(1 \leq X \leq 3)$

2. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos uma moeda honesta o mesmo número de vezes do número indicado na face superior do dado. Defina a v.a.d X_i o número de caras observadas dado que observamos a face de número i no dado.

   a) Qual a distribuição de X_i (para um i fixado)?
   b) Qual a probabilidade de se obter 4 caras?
   c) Dado que foram obtidas 4 caras, qual a probabilidade de que o número da face superior do dado tenha sido 5?

3. Seja $X \sim$ geométrica(p). Defina uma v.a.d $X = X - 1$. Encontre a distribuição de Y, sua esperança e variância. O que representa a v.a. Y no contexto da distribuição geométrica.

4. Seja $X \sim$ BN(r, p). Defina uma v.a.d $Y = X - r$. Encontre a distribuição de Y, sua esperança e variância. O que representa a v.a. Y no contexto da distribuição Binomial negativa.

5. Seja X $\sim Poisson(\lambda)$ e considere que $P(X \geq 0) = p, p \in (0, 1)$. Encontre λ em função de p.

6. Seja $X \sim exp(\lambda), \lambda \in I\!R^+$. Prove a propriedade da falta de memória, ou seja:

$$P(X > i + j | X > j) = P(X > i), \forall i, j \geq 0$$

7. Seja $X \sim N(10, 4)$. Responda dos itens:

   - Calcule $P(X \leq 6)$, $P(X \geq 8)$, $P(2 \leq X \leq 6)$, $P(0 \leq X \leq 5)$
   - Obtenha o ponto z, de sorte que (para cada uma): $P(X \leq z) = 0,1788$ e $P(X \geq z) = 0,7005$

8. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e admita que $P(X \leq 5) = 0,9987$ e $P(X \geq 3) = 0,1587$. Obtenha μ e σ^2.

9. Resolva a questão 12 da Lista II utilizando variáveis aleatórias.

10. Seja $X \sim Bernoulli(p), p \in (0,1)$:

    - Prove que $\mathcal{E}(X)^k = p \ \forall k \in IN$
    - Qual a probabilidade das raízes da equação $y^2 + yX + X + 1$ serem reais e distintas? E reais e iguais?

11. Seja X uma v.a.c. de sorte que $f_X(x) = (1/2)(\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,2]}(x) + (1-\theta)\mathbb{1}_{(2,3)}(x))$. Responda:

    - Para que valores de θ f_X é de fato uma f.d.p.
    - Encontre a F_X correspondente e a escreva em termos de funções indicadoras.
    - Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

12. Seja X uma v.a.d., tal que $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!(1-e^{-\lambda})}, \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots\}}(x)$:

    - Prove que f_x de fato é uma f.d.p.
    - Calcule $E(X)$ e $Var(X)$ através de suas definições.

13. Uma v.a.c. tem distribuição Weibull de parâmetros (a,b) > 0 (denota-se $X \sim Weibull(a, b)$, se sua f.d.p. é da forma (dica: para esse exercício, usa a função gama vista em sala):

$$f_X(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

    - Prove que f_X é de fato uma densidade.
    - Calcue a f.d.a de X.

- Calcule $E(X^k), k > 0$, $Var(X)$, $Mo(X)$ e Md(X).

14. Definição. Se Z é uma v.a.d sua moda é definida como sendo o valor, digamos x_{Mo}, tal que $P(X = x_{Mo}) > P(X = x), \forall x \neq x_{Mo}$. Se $X \sim$ geométrica(p) encontre sua moda.

15. Definição. Se X é uma v.a.d sua mediana é definida como sendo o valor, digamos x_{Md}, tal que $P(X \leq x_{Md}) \geq 1/2$ e $P(X \geq x_{Md}) \geq 1/2$. O que representa, então, a mediana, em termos da distribuição de X.

16. Pesquise sobre a distribuição Hipergeométrica bem como sobre o cálculo de sua esperança e variância no livro do Sheldon Ross.