ME 705 A - Inferência Bayesianam
Segundo semestre de 2013
Lista de Exercícios IV

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, a esperança, vício, variância e EQM do estimador Bayesiano devem ser calculados sob a ótica frequentista.

1. Resolva os exercícios deixados em sala.
2. Seja $X|\boldsymbol{\theta}$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \phi) \in (0,1) \times (0, \infty)$, tal que

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = (1-\theta)\phi e^{\phi x} \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x) + \theta\phi e^{-\phi x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

   a) Mostre que é possível escrever a fdp acima tal como:

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \phi(1-\theta)^{h(x)}\theta^{1-h(x)}e^{-\phi(xg(x))}$$

   em que $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x)$, $g(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x)$
   e estenda para o caso que se tem uma amostra aleatória de tal distribuição.

   b) Obtenha: a família conjugada de prioris, a prori de Jeffreys e a priori de Jeffreys sob independência, verificando se são próprias.

   c) Obtenha as posterioris conjuntas e marginais sob cada uma das prioris do item b). Caso não seja possível de obter a posteriori analiticamente, mostre como obtê-la numericamente.

   d) Construa o IC_B simétrico de credibilidade γ para os parâmetros de interesse, através das posterioris para os parâmetros originais e através da transformação para alguma das quatro "distribuições-tabeladas" (normal, t de Student, qui-quadrado ou F de Snedcor), como visto em sala de aula, sob cada uma das posterioris obtidas no item c). Caso não seja possível de obter o IC_B analiticamente, mostre commo obtê-lo numericamente.

   e) Obtenha intervalos HPD de credibilidade γ para os parâmetros de interesse e se não for possível de obtê-los analiticamente, implemente suas obtenções no programa R usando a função *hpd*, sob cada uma das posterioris obtidas no item c). Caso não seja possível de obter o HPD analiticamente, mostre commo obtê-lo numericamente.

3. Considere hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ e as prioris correspondentes à família conjugada e a de Jeffreys (se esta for própria) da forma usual, isto é, **sem considerá-las na forma de mistura**. Para as distribuições biparamétricas, considere cada um dos parâmetros por vez. Obtenha a fórmula das medidas de evidência $O(H_1, H_0), O(H_1, H_0|\boldsymbol{x}), B(\boldsymbol{x})$, em relação às questões 2, 3, 4, 6, 7, 10 e 12 da Lista I, as questões 4, 5, 6, 7, 9, 10 e 11 da Lista II, as questões 3 e 4 da Lista III e questão 2 desta Lista.

4. Repita a Questão anterior considerando $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, e as prioris (família conjugada e de Jeffreys, se esta for própria), na forma de mistura finita como vista em sala de aula.

5. Aplique os resultados desenvolvidos nas duas questões anteriores para testar os dois conjuntos de hipóteses ($H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ e $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$), nos dados descritos nas questões 11 e 12 da Lista I. Em relação à questão 11, considere que $\theta_0 = 100$. Relativamente à Questão 12 da Lista I, considere que os dois cojuntos de dados podem ser modelados por distribuições de Poisson independentes e lembre-se de que se quer testar à igualdade entre os parâmetros das distribuições. Suas conclusões são equivalentes àquelas obtidas com os intervalos de credibilidade $\gamma = 0,95$ simétricos e HPD?

6. O arquivo DadosBayes2013.xls referem-se a conjuntos de dados relativos aos desenvolvimentos bayesianos (que foram feitos em alguma lista e/ou em sala de aula) para algumas distribuições. Cada planilha diz respeito à um conjunto de dados relativos à uma determinada distribuição. Por exemplo, a planilha "Normal" refere-se aos desenvolvimentos bayesianos feitos para a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ (com um parâmetro conhecido e com os dois desconhecidos). De modo semelhante para as outras planilhas. Considere, sempre que possível, a priori da família conjugada bem como a priori de Jeffreys. A escolha dos hiperparâmetros, quando for o caso, fica a seu critério. Responda as questões à seguir

7. Para cada conjunto de dados calcule as estimativas Bayesianas pontuais tradicionais, i.e., EAP, MAP, MeAP (se for possível de obtê-los analitcamente) bem como o EPAP.

8. Para cada conjunto de dados calcule intervalos de credibilidade (simétricos) e intervalos HPD, com uma credibilidade de sua escolha. Em relação aos intervalos de credibilidade simétricos, use a distribuição a posteriori original bem como uma transformação que leve à uma das 4 distribuições (normal, t de Student, qui-quadrado, F de Snedcor).

9. Considere hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Para as distribuições biparamétricas, considere cada um dos parâmetros por vez. Calcule as medidas de evidência $O(H_1, H_0), O(H_1, H_0|\boldsymbol{x}), B(\boldsymbol{x})$. Os valores θ_0 são (seguindo a ordem das planilhas):

   (a) $\mu_0 = -1$ (σ^2 conhecido ($= 100$) e desconhecido), $\sigma_0^2 = 100$ (μ conhecido (=-3) e μ desconhecido) (Normal)

   (b) $0,80$ (Binomial)

   (c) 20 (Gama)

   (d) 3 (Poisson)

   (e) 30 [$U(0, \theta)$]

   (f) $\gamma = 0,8, \phi = 0,7$ (Binomial bivariada)

   (g) $\gamma = 0,3, \phi = 10$ (Binomial-Poisson)

   Para a distribuição Binomial considere que m é igual ao número de observações na planilha. Para a distribuição gama faça $r = 5$. Para a distribuição binomial bivariada considere $m = 8$.

10. Repita a questão anterior considerando agora as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Considere $\gamma = 0,5$ na priori definida como a mistura finita.