ME - 310 Probabilidade II
Segundo semestre de 2009
Lista de exercícios III
Entrega: Exercícios 2, 6 e 8 em 21/10/2009

Sugestão: Utilize a simetria, quando for o caso, para o cálculo envolvendo vetores aleatórios.

1. Sejam (X, Y) um vetor aleatório qualquer e a_1, a_2, b_1, b_2 constantes reais. Prove que:

   a) $\mathcal{E}[(a_1X \pm a_2) \pm (b_1Y \pm b_2)] = (a_1\mathcal{E}(X) \pm a_2) \pm (b_1\mathcal{E}(Y) \pm b_2)$.

   b) $\mathcal{C}ov[(a_1X \pm a_2), (b_1Y \pm b_2)] = a_1b_1\mathcal{C}ov(X, Y)$.

   c) $\mathcal{C}orr[(a_1X \pm a_2), (b_1Y \pm b_2)] = \mathcal{C}orr(X, Y)$.

   d) $\mathcal{V}[(a_1X \pm a_2) \pm (b_1Y \pm b_2)] = a_1^2\mathcal{V}(X) + b_1^2\mathcal{V}(Y) \pm 2a_1b_1\mathcal{C}ov(X, Y)$.

2. Seja $X \sim N(0, 1)$ e defina $Y = X^2$. Encontre a f.g.m. de Y. Qual é a distribuição de Y? O resultado era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

3. Considere uma a.a. de tamanho n, $X_1, ..., X_n$ de $X \sim$ Bernoulli(p) (isso significa que as variáveis são mutuamente independentes e possuem a mesma distribuição de X). Defina $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Obtenha a distribuição de S.

4. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in (0, +\infty)$. Obtenha a distribuição de $Y = e^X$.

5. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho), \rho \in (-1, 1)$. Defina $Y_1 = a_1X_1 + a_2$ e $Y_2 = b_1X_2 + b_2$, em que (a_1, a_2, b_1, b_2) são constantes conhecidas. Encontre a distribuição conjunta de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)'$ e suas respectivas densidades marginais. Sugestão: calcule a f.g.m. de $\boldsymbol{Y}$.

6. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho), \rho \in (-1, 1)$, cuja a densidade é dada por:

   $$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} (2\pi)^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\,(1-\rho^2)}\left[x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2\right]\right\}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\boldsymbol{x})$$

   Defina $Y_1 = \frac{X_1+X_2}{2}$ e $Y_2 = \frac{X_2-X_1}{2}$. Responda os itens:

   a) Obtenha a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_2)'$ através do método do Jacobiano. Identifique tal distribuição.

   b) Obtenha as distribuições marginais de Y_1 e de Y_2. Identifique suas distribuições. Os resultados que você obteve eram esperados? Justifique adequadamente sua resposta.

c) As variáveis Y_1 e Y_2 são independentes? Tal resultado era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

7. Seja $X_i \sim \chi^2_{(k_i)}$ v.a.'s independentes. Obtenha a distribuição de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

8. Considere duas variáveis aleatórias independentes $X_i \sim$ Geométrica(p). Defina $S = X_1 + X_2$. Responda os itens:

   a) Obtenha a distribuição conjunta de $(S, X_2)'$.

   b) Obtenha a distribuição marginal de S. Seu resultado era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

   c) Obtenha a distribuição condicional de $X_2 | S = s$.

9. Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s aleatórias independentes, $X_i \sim \Gamma(r_i, \lambda), i = 1, 2,$ e defina $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ e $Y_2 = X_1 + X_2$. Responda os itens:

   a) Obtenha a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_2)'$. através do método do Jacobiano.

   b) Obtenha as distribuições marginais de Y_1 e de Y_2. Identifique suas distribuições. O resultado relacionado à Y_2 era esperado? Justifique adequadamente sua resposta.

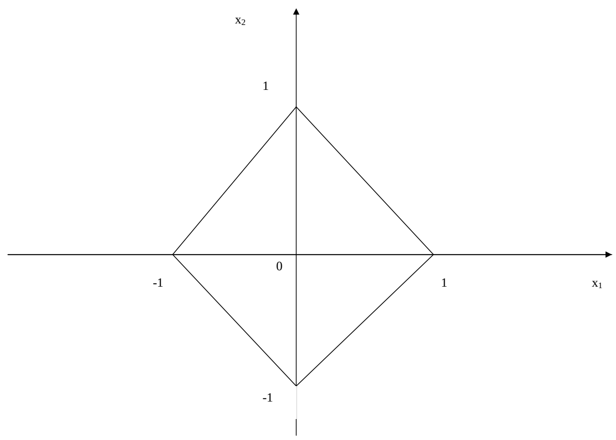
   c) As variáveis Y_1 e Y_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta.

10. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim$ Poisson(λ) e $N \sim U0, 1, ..., N$, U é independente de X_i, $\forall i$. Defina $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Obtenha a esperança e a variância de S. Sugestão: utilize esperança e variância condicional. Qual é a distribuição de S?

11. Sejam $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} F_X, i = 1, 2, ..., n$, ou seja, cada variável aleatória possui a mesma f.d.a. F_X. Defina $Y = min(X_1, ..., X_n)$ e $Z = max(X_1, ..., X_n)$. Calcule as f.d.a.'s e as f.d.p.'s (marginais) de Y e Z.

12. Sejam $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} F_X, i = 1, 2, ..., n$ e contínuas, ou seja, cada variável aleatória possui a mesma f.d.a. F_X. Qual a distribuição de $Y = \sum_{i=1}^{n} [-\ln(F_X(X_i))]$? (Este resultado é bastante utilizado para a construção de intervalos de confiança).

13. Considere (X_1, X_2) um vetor aleatório contínuo distribuído uniformemente na figura abaixo:



Responda os itens:

a) Obtenha a distribuição conjunta de $(X_1, X_2)'$.

b) Obtenha as distribuições marginais de X_1 e de X_2. As variáveis X_1 e X_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta.

c) Defina $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_2 - X_1$. Obtenha a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_2)'$ através do método do Jacobiano.

d) As variáveis Y_1 e Y_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta.

14. Sejam $X_i, i = 1, 2$ duas v.a's independetes tais que $X_i \sim N(0, 1)$. Defina $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ e $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$. Responda os itens:

a) Obtenha a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_2)'$.

b) Obtenha as distribuições marginais de Y_1 e de Y_2. As variáveis Y_1 e Y_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta.

15. Seja X e Y v.a.'s independentes tais que $X, Y \sim U(0, 1)$. Encontre, através do método do Jacobiano, as f.d.p,'s conjuntas e marginais das seguintes transformações;

a) U = X, Z = X +Y.

b) $U = X$, $Z = X/Y$.

c) $U = X + Y$, $Z = X/Y$.