ME - 210 B Probabilidade I
Primeiro semestre de 2010
Lista de exercícios III

1. Considere o lançamento de dois dados honestos. Denote X_i como sendo o número da face voltada para cima no laçamento do i-ésimo dado, i = 1, 2. Encontre a função de probabilidade, média e variância das seguintes variáveis aleatórias:

   a) X_i, i = 1, 2
   b) $max\{X_1, X_2\}$
   c) $|X_1 - X_2|$
   d) $X_1 + X_2$

2. Considere a retirada (sem reposição) de três bolas de uma urna que contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Defina X (Y): o maior (menor) número retirado. Encontre a função de probabilidade de X e Y .

3. Repita a questão anterior, considerando que a retirada é feita com reposição.

4. Seja $X \sim Binomial(5, 2/3)$. Calcule:

   a) $P(X = 3)$
   b) $P(X \geq 4)$
   c) $P(X \leq 1)$
   d) $P(2 \leq X \leq 4)$

5. Considere o experimento aleatório que consiste em jogar uma moeda honesta. Se a face observada for "cara", retira-se duas bolas, consecutivamente, de uma urna que contem 3 bolas brancas e 2 azuis, caso contrátio (face observada "coroa"), retira-se duas bolas, consecutivamente, de uma urna que contem 1 bola branca e 3 azuis. Defina uma variável aleatória X que representa o número de bolas azuis observadas. Calcule a distribuição, esperança, variância, desvio-padrão e coeficiente de variação de X quando:

   a) As retiradas forem sem reposição.
   b) As retiradas forem com reposição.

6. Repita o exercício anterior, considerando que a amostragem é feita com reposição mas, adicionamos uma outra bola (da mesma cor daquela retirada da primeira vez) antes da segunda retirada.

7. Seja X uma v.a.c tal que sua f.d.p é dada por $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}(x)_{[0,1]}$. Responda os itens:

   a) Prove que $f_X(x)$ é de fato uma f.d.p (contínua).

   b) Calcule a f.d.a de X e a escreva utilizando funções indicadoras.

   c) Calcule a média e a variância de X.

8. Seja $X \sim G(p), p \in (0,1)$. Prove que:

$$P(X \geq i+j | X \geq j) = P(X \geq i), \forall i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

9. Verique que as funções abaixo são legítimas f.d.a's e encontre as respectivas f.d.p.'s associadas.

   a) $F_X(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[1,2)}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}(x)_{[2,3)} + \mathbb{1}(x)_{[3,\infty)}$

   b) $F_X(x) = e^{e^{-x}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$.

   c) $F_X(x) = (1 - e^{-x^k})\mathbb{1}_{[0,\infty)}, k > 0$ (k é apenas uma constante).

   d) $F_X(x) = \left(1 - \frac{1}{x^a}\right)\mathbb{1}(x)_{[1,\infty)}, a > 0$ (a é apenas uma constante).

   e) $F_X(x) = (1 - (1-p)^{x+1})\mathbb{1}(x)_{[0,\infty)}p > 0$ (p é apenas uma constante e neste caso, X é uma v.a.d.).

10. Sejam H,G duas f.d.a's. Prove que $F(x) = pG(x) + (1-p)H(x)$ é, de fato, uma f.d.a., em que $p \in (0,1)$.

11. Considere uma caixa com B bolas brancas e (N - B) bolas azuis e o experimento que consiste em retirar uma amostra aleatória sem reposição de n bolas dessa caixa. Defina a seguinte variável aleatória X: o número de bolas brancas observadas na amostra de tamanho n. Responda os itens:

    a) Qual o espaço amostral e a $\sigma-$ álgebra associadas a esse experimento?

    b) A v.a. X é discreta ou contínua? Justifique, adequadamente, sua resposta.

b) Obtenha a f.d.p da v.a X.

12. Dizemos que uma v.a.d. X tem distribuição logaritmica de parâmetro p, $p \in (0,1)$ (notação: $X \sim logaritmica(p)$) se sua f.d.p é dada por $f_X(x) = P(X = x) = \frac{q^x}{-x\ln(p)} \mathbb{1}(x)_{\{1,2,\ldots\}}$. Calcule o valor esperado e a variância de X.

13. Exercícios do Sheldon Ross:

    - Página 187 (problemas): 17, 28, 57.
    - Página 247 (problemas): 1, 14 .
    - Página 251 (theoretical exercises): 8.

14. Prove que se X é uma v.a.d ou uma v.a.c então $V(aX \pm b) = a^2V(X)$, a, b constantes.