

MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2022
Lista de exercícios III

1. Resolva todos os exercícios deixados em sala de aula.
2. Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. de X , $X \sim U(\theta, \theta + \alpha)$, $\theta \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, \infty)$ (conhecido). Responda os itens.

- a) Prove que $\mathbf{T} = (Y_1, Y_n)'$ é uma estatística suficiente e minimal para θ , em que $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$ e $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
- b) Calcule a distribuição do vetor \mathbf{T} . Lembre-se de que, a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_n)'$ de uma a.a de tamanho n de uma v.a.c X é dada por,

$$f_{Y_1, Y_n}(y_1, y_n) = n(n-1)[F_X(y_n) - F_X(y_1)]^{n-2} f_X(y_1) f_X(y_n) I_{(y_1 < y_n)}$$

em que F_X é a f.d.a de X e f_X é a f.d.p de X .

- c) Defina $R = Y_n - Y_1$ e $M = \frac{Y_1 + Y_n}{2}$, calcule a distribuição conjunta de $(R, M)'$ através do método do Jacobiano e obtenha a distribuição marginal de R . A estatística R é ancilar para θ ?
 - d) Calcule $\mathcal{E}(R)$ usando a distribuição de R e usando as distribuições marginais de Y_1 e Y_n .
 - e) Usando a estatística R prove que a estatística \mathbf{T} não é completa.
3. Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. de X , $X \sim U\{1, 2, \dots, \theta\}$, $\theta \in \mathcal{N}^*$. Responda os itens.
 - a) Prove que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente e minimal para θ .
 - b) Encontre a f.d.p de Y_n e prove que Y_n é uma estatística completa.
 - c) Calcule a $\mathcal{E}(Y_n)$ e $\mathcal{V}ar(Y_n)$.

4. Para as distribuições das Listas I e II, calcule a esperança e a variância das estatísticas suficientes, minimais e completas que você encontrou.
5. Considerando uma a.a. X_1, \dots, X_n de X , para cada uma das distribuição das Listas I e II, obtenha os estimadores pelo MM e de MV calculando, se possível, $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{V}(X)$, $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{EQM}(X)$ e suas respectivas distribuições, de forma exata. Faça isso também para $X \sim \text{beta}(a, b)$.