ME - 310 Probabilidade II
Segundo semestre de 2009
Lista de exercícios II
Entrega: Exercícios 1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 e 20 em 23/09/2009

Sugestão: Utilize a simetria, quando for o caso, para o cálculo envolvendo vetores aleatórios. Exemplo: note que as densidades marginais de X_1 e X_2 no caso normal bivariado são análogas entre si, o mesmo acontece com o vetor aleatório da Questão 17, dentre outros exemplos.

1. Seja $\boldsymbol{X} \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, cuja a densidade é dada por:
$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}(2\pi)^{-1} \times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^2}(\boldsymbol{x})$$
Prove que X_1 e X_2 são independentes se e somente se forem não correlacionadas.

2. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ um ve.a. contínuo com distribuição dada na Questão 1). Responda os itens:

    a) Calcule esperança de X_i e X_i^2, i = 1, 2, pela definição.
    b) Calcule $\mathcal{E}(X_1X_2)$ pela definição.
    c) Calcule $\mathcal{E}(X_i)$, $\mathcal{E}(X_i^2)$ e $\mathcal{E}(X_1X_2)$ utilizando esperanças condicionais.
    d) Os resultados obtidos no item c) coincidem com aqueles obtidos nos itens a) e b)? Coincidem com os resultados vistos em sala? Suas conclusões eram esperadas? Justifique suas respostas.

3. Seja $X \sim N(0,1)$, qual a distribuição de $Y = X^2$.

4. Seja X uma v.a. qualquer com f.d.a. F_X e suporte em $A \subset \mathcal{R}$. Qual a distribuição de $Y = \mathbb{1}_{(X \leq c)}$, em que c é uma constante real, $c \in \mathcal{R}$.

5. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ um ve.a. discreto, $\boldsymbol{X} \sim$ Trinomial(n, p_1, p_2). Responda os itens:

    a) Calcule esperança de X_i e X_i^2, i = 1, 2, pela definição.
    b) Calcule $\mathcal{E}(X_1X_2)$ pela definição.

c) Calcule $\mathcal{E}(X_i)$, $\mathcal{E}(X_i^2)$ e $\mathcal{E}(X_1X_2)$ utilizando esperanças condicionais.

d) Os resultados obtidos no item c) coincidem com aqueles obtidos nos itens a) e b)? Coincidem com os resultados vistos em sala? Suas conclusões eram esperadas? Justifique suas respostas.

6. Seja X uma v.a.d., tal que $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!(1-e^{\lambda})}, \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots\}}(x), \lambda \in \mathcal{R}^+$:

   - Prove que f_X de fato é uma f.d.p.
   - Calcule a f.g.m. de X e, através dela, $E(X)$ e $Var(X)$.
   - Calcule $E(X)$ e $Var(X)$ através de suas definições.

7. Sejam H, G duas f.d.a's. Prove que $F(x) = pG(x) + (1-p)H(x)$ é, de fato, uma f.d.a., em que $p \in (0,1)$. Verifique se $Q(x) = H(x)G(x)$ é uma f.d.a.

8. Seja $X \sim exp(\lambda), \lambda \in I\!R^+$. Prove a propriedade da falta de memória, ou seja:

$$P(X > i + j | X > j) = P(X > i), \forall i, j \geq 0$$

9. Seja X uma v.a.c. de sorte que $f_X(x) = (1/2)\left[\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,2]}(x) + (1-\theta)\mathbb{1}_{(2,3)}(x)\right]$. Responda:

   - Para que valores de θ f_X é de fato uma f.d.p.
   - Encontre a F_X correspondente e a escreva em termos de funções indicadoras.
   - Calcule $E(X)$, $Var(X)$ e $Md(X)$.
   - Calcule a respectiva f.g.m. de X. Calcule a $E(X)$ e $Var(X)$ através dela.

10. Sejam g, h duas f.d.p.'s contínuas cujas f.d.a's são, respectivamente, H, G. Prove que $f(x) = pg(x) + (1-p)h(x)$ é também uma f.d.p, em que $p \in (0,1)$. Calcule a correspondente f.d.a.

11. Seja X uma v.a qualquer (discreta ou contínua) com f.d.a. F_X. Define-se $S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$ como sendo a função de sobrevivência de X. Prove que:

   - Se $x < y$ então $S_X(x) \geq S_X(y)$.
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} S_X(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} S_X(x) = 0$.

- $\lim\limits_{0<h\to 0} S_X(x+h) = S_X(x)$.

12. Seja X uma v.a.c. com f.d.a F_X e f.d.s S_X. Qual a distribuição de $Y = S_X(X)$ e $Z = F_X(X)S_X(X)$?

13. Sejam (X, Y) um vetor aleatório com f.d.a conjunta $F_{(X,Y)}$ e f.d.a's marginais F_X e F_Y, respectivamente. Prove que

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$$

Sugestão: Defina os conjuntos $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ e $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$ e analize $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

14. Seja (X,Y) um vetor aleatório com f.d.p. conjunta dada por:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = [1 - \alpha(1 - 2x)(1 - 2y)]\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y), \alpha \in [-1, 1]$$

   - Prove que $f_{(X,Y)}$ é de fato uma densidade bivariada.
   - Calcule as densidades marginais de X e Y, suas esperanças e variâncias.
   - Calcule a covariância entre X e Y. Neste caso X e Y são independentes $\leftrightarrow$ são independentes? Porque ?

15. Sejam X,Y duas variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja Z uma outra variável aleatória. Mostre que:

$$Cov(X, Y) = E\{Cov[(X, Y)|Z]\} + Cov(E(X|Z), E(Y|Z)),$$

em que,

$$Cov[(X, Y)|Z] := E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$$

16. A distribuição conjunta de (X,Y) é dada por p(x, y), onde

$$p(1,1) = 1/18; p(2,1) = 1/3; p(3,1) = 1/9$$
$$p(1,2) = 1/18; p(2,2) = 0; p(3,2) = 1/6$$
$$p(1,3) = 0; p(2,3) = 1/9; p(3,3) = 1/6 :$$

a) Calcule as distribuições marginais de X e Y .
b) As v.a.'s X e Y são independentes? Justifique sua resposta.
c) Calcule a distribuição condicional de X dado que Y = 1.

17. Considere um ve. a. contínua (X,Y) cuja f.d.p. conjunta é dada por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c(x+y)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

Responda os itens:

a) Obtenha o valor de c de modo que $f_{(X,Y)}$ de fato seja uma f.d.p. bivariada.
b) Obtenha as densidades marginais de X e de Y.
c) $P(X < Y)$.
d) $P(X + Y < 1)$.
e) X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

18. Considere um ve. a. contínua (X,Y) cuja f.d.p. conjunta é dada por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = cxe^{-(x+y)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Responda os itens:

a) Obtenha o valor de c de modo que $f_{(X,Y)}$ de fato seja uma f.d.p. bivariada.
b) Obtenha as densidades marginais de X e de Y.
c) Obtenha as densidades condicionais de $X|Y = y$ e de $Y|X = x$.
d) X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

19. Seja $X|Y = y \sim \text{Binomial}(n, y)$ e $Y \sim \text{Beta}(a, b)$.

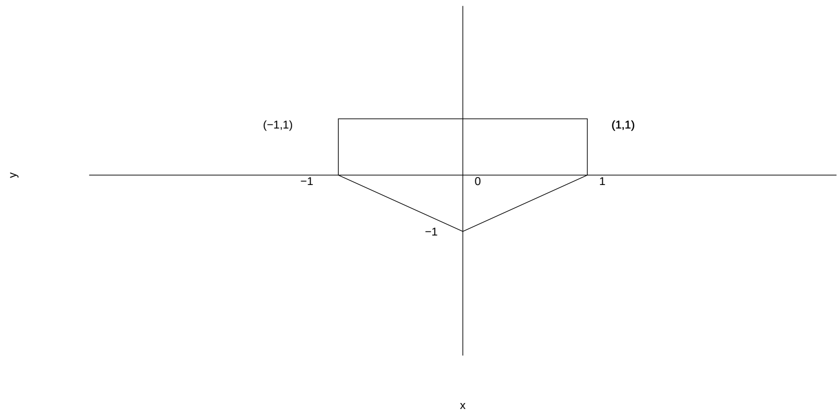
Responda os itens:

a) Obtenha a densidade marginal de X.

b) Calcule a esperança e variância de X. Sugestão: Utilize propriedades da esperança e variância condicional.

c) Obtenha a distribuição de $Y|X = x$.

20. Seja (X,Y) uniformemente distribuído na seguinte região:



a) Ache a densidade conjunta de (X,Y).

b) Calcule as densidades marginais de X e Y, suas esperanças e variâncias.

c) Calcule as distribuições condicionais de $X|Y$ e de $Y|X$. Calcule as esperanças e variâncias de X e Y utilizando as distribuições condicionais.

d) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y. Elas são independentes?