

ME - 210 B Probabilidade I  
Primeiro semestre de 2010  
Lista de exercícios II

1. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três eventos definidos em um mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
Expresse os seguintes eventos em termos de  $A$ ,  $B$  e  $C$ :
  - i) Apenas o evento  $A$  ocorre;
  - ii) Apenas um dos três eventos ocorre;
  - iii)  $A$  e  $C$  ocorrem, mas  $B$  não ocorre;
  - iv) Nenhum dos três eventos ocorre;
  - v) Pelo menos um dos três eventos ocorre;
  - vi) No máximo um dos três eventos ocorre;
  - vii) Pelo menos dois dos três eventos ocorre.
  
2. Exercícios do Sheldon Ross:
  - Página 55 (problemas): 1, 5, 6, 8, 12, 19, 23, 27, 28, 44.
  - Página 61 (exercícios teóricos): 13, 19.
  - Página 63: (“self-test problems and exercises”): 2, 6.
  
3. Calcule a probabilidade que dois lançamentos de três dados resultem na mesma configuração quando os dados são:
  - a) Distinguíveis.
  - a) Indistinguíveis.
  
4. Um homem bêbado tem um molho com  $n$  chaves e apenas uma abre a porta da sua casa.
  - a) Se ele escolhe aleatoriamente, porém sem considerar a mesma chave mais de uma vez (i.e., ele não está muito bêbado), qual a probabilidade que ele consiga abrir a porta na  $k$ -ésima tentativa,  $k = 1, \dots, n$ ?
  - b) Responda ao item i), considerando que ele está muito bêbado (ou seja, ele pode considerar a mesma chave mais de uma vez).

5. Sejam  $n$  bolas distribuídas aleatoriamente em  $r$  urnas distinguíveis, sem restrições no número de bolas por urna. Encontre a probabilidade:
- Exatamente  $k$  bolas nas primeiras  $r$  urnas.
  - Exatamente uma urna vazia.
  - Exatamente  $s$  urnas vazias.
6. Considere uma urna contendo  $B$  bolas brancas e  $A$  bolas azuis. Seja o experimento de retirar uma bola dessa urna, observar a sua cor e devolver essa bola com outra da mesma cor. A seguir, seleciona-se uma segunda bola dessa urna e também observa-se a sua cor. Considere que todas as bolas, independentemente de sua cor, têm a mesma probabilidade de serem retiradas. Responda os itens:
- Descreva o espaço amostral associado ao experimento aleatório bem como a  $\sigma$ -álgebra gerada por ele.
  - Qual a probabilidade da primeira bola ser branca?
  - Qual a probabilidade da segunda bola ser branca?
  - Qual a probabilidade das duas bolas serem brancas?
  - Qual a probabilidade da segunda bola ser branca dado que a primeira é azul?
  - Qual a probabilidade da primeira bola ser azul dado que a segunda é branca?
  - Qual a probabilidade de pelo menos uma das bolas ser branca?
7. Se  $(\Omega; \mathcal{A}; P_1)$  e  $(\Omega; \mathcal{A}; P_2)$  são espaços de probabilidades e  $0 < \alpha < 1$ , mostre que  $(\Omega; \mathcal{A}; \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2)$  é também um espaço de probabilidade.
8. Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos definidos em um espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Considere uma medida de probabilidade  $P$  definida no espaço mensurável em questão. Mostre que  $\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$ .
9. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos uma moeda honesta o mesmo número de vezes do número indicado na face superior do dado.
- Qual a probabilidade de obter 4 caras?
  - Dado que foram obtidas 4 caras, qual a probabilidade de que o número da face superior do dado tenha sido 5?

10. Um experimento consiste em lançar duas vezes uma moeda honesta. Considere os seguintes eventos:
- A = O primeiro resultado resulta em cara  
B = O segundo lançamento resulta em cara  
C = O resultado do primeiro lançamento coincide com o resultado do segundo lançamento.
- Mostre que A, B e C são independentes dois a dois, porém não são independentes.
11. Meu professor de xadrez quer me convencer a não abandonar meus estudos nesta modalidade. Para tanto, ele me oferece um bom cheque, a ser depositado na minha conta bancária, se eu ganhar pelo menos duas partidas seguidas em uma série de três, jogando com ele e com Gasparov, que é um mestre conhecedor de xadrez. Gasparov joga melhor que o meu professor. Ele (meu professor) diz que eu posso escolher a sequência de três partidas, onde eu devo ganhar duas seguidas. Eu posso escolher (jogar com ele, Gasparov e ele) ou (jogar com Gasparov, ele e Gasparov). E agora, qual sequência maximiza a chance de eu ganhar o cheque? A resposta é surpreendente? Justifique.
12. Três jogadores A, B e C se revezam em um jogo honesto de acordo com as seguintes regras. No início A e B jogam e C fica de fora. O perdedor é substituído por aquele que estava fora e assim sucessivamente. O jogo continua desta forma até que o mesmo jogador ganhe duas vezes consecutivas, sendo então declarado vencedor. Qual a probabilidade que:
- A vença?
  - C vença?
  - Uma decisão ocorra na k-ésima rodada ou antes?