MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2022
Lista de exercícios II

1. Prove todos os resultados deixados em aula.

2. Verifique se as seguintes distribuições pertencem a alguma das seguintes famílias: localização, escala, localização-escala.

    a) $X \sim U(-\theta, \theta), \theta > 0$
    b) $f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \dfrac{1}{\sigma} \exp\left\{-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \mu \in \mathcal{R}, \sigma \in I\!R^+$.
    c) $X \sim$ logística(μ, σ^2) (link).
    d) $X \sim t_\nu(\mu, \sigma)$ (link).
    e) $F_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\exp\left\{-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right\} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)', \mu \in I\!R, \sigma \in I\!R^+$.

3. Com base em uma amostra aleatória de dimensão n e utilizando o critério da fatoração, encontre estatísticas suficientes para os parâmetros dos seguintes modelos:

    a) $X \sim$ Bernoulli(θ), $\theta \in (0, 1)$.
    b) $X \sim$ Poisson$(\theta), \theta \in (0, \infty)$.
    c) $X \sim$ gama$(r, \lambda), r, \lambda > 0$, $f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\lambda^r \Gamma(r)} e^{-x/\lambda} x^{r-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.
    d) $X \sim$ binomial-negativa(r, θ), $r \geq 1$ conhecido e $\theta \in (0, 1)$, $f_X(x; \theta) = \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} \theta^r (1-\theta)^{x-r} \mathbb{1}_{\{r,r+1,\ldots\}}(x)$.
    e) $X \sim U(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$.
    f) $X \sim$ trinomial$(m, p_1, p_2), m \in \mathcal{N}$, conhecido$, p_i \in (0, 1), p_1 + p_2 \in (0, 1)$
    g) $X \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho), \rho \in (-1, 1)$.
    h) $Y_i = \alpha + X_i\beta + \xi_i$, $\xi_i \sim N(0, \sigma^2), X_i's$ conhecidos.
    i) $Y_i \sim$ Bernoulli(p_i), $p_i = \dfrac{1}{1 + e^{\alpha + X_i\beta}}, X_i's$ conhecidos.

4. Para as distribuições da Questão 3), verifique se as estatísticas suficientes que você encontrou são também minimais e completas, através das respectivas definições.

5. Repita a Questão 3) para as distribuições apresentadas na Questão 4) da Lista 1 (link).

6. Repita a Questão 4) para as distribuições apresentadas na Questão 4) da Lista 1 (link).

7. Considere uma amostra aleatória $X_1, ..., X_n$ de X, em que

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$$

Responda os itens abaixo

a) Se μ for conhecido, encontre uma estatística suficiente, minimal e completa. Encontre sua distribuição.

b) Se σ^2 for conhecido, encontre uma estatística suficiente para μ. Encontre sua distribuição. Esta estatística também é minimal e completa?

c) Se $\boldsymbol{\theta}$ for desconhecido, encontre uma estatística suficiente para ele. Esta estatística seria completa? (Sugestão: tente achar uma função não nula dessa estatística, cuja esperança seja igual a 0).

8. Considerando uma amostra aleatória de tamanho n, para todas as distribuições vistas nas Listas I e II (esta), que pertencem à $FE_k(\boldsymbol{\theta})$ (regular), identifique a respectiva estatística suficiente minimal e completa.