MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2010
Lista de exercícios II

1. Prove todos os resultados deixados em aula.

2. Verifique se as seguintes distribuições pertencem a alguma das seguintes famílias: localização, escala, localização-escala.

   a) $X \sim U(-\theta, \theta), \theta > 0$
   b) $f_X(x; \theta) = \dfrac{1}{\sigma} \exp\left\{-\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$
   c) $X \sim$ logística(μ, σ^2).
   d) $f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \dfrac{1}{\sigma} e^{-\dfrac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \mu \in \mathcal{R}.$
   e) $X \sim t_\nu(\mu, \sigma)$
   f) $F_X(x; \boldsymbol{\theta}) = e^{e^{-\dfrac{x-\mu}{\sigma}}}.$

3. Com base em uma amostra aleatória de dimensão n e utilizando o critério da fatoração, encontre estatísticas suficientes para os parâmetros dos seguintes modelos:

   a) $X \sim$ Bernoulli(θ), $\theta \in (0, 1)$.
   b) $X \sim$ Poisson$(\theta), \theta \in (0, \infty)$.
   c) $X \sim$ gama$(r, \lambda), r, \lambda > 0$, $f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\lambda^r \Gamma(r)} e^{-x/\lambda} x^{r-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.
   d) $X \sim$ binomial-negativa(r, θ), $r \geq 1$ conhecido e $\theta \in (0, 1)$, $f_X(x; \theta) = \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} \theta^r (1-\theta)^{x-r} \mathbb{1}_{r,r+1,\ldots}(x)$.
   e) $X \sim U(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$.
   f) $X \sim$ trinomial$(m, p_1, p_2), m \in \mathcal{N}$, conhecido, $p_i \in (0, 1), p_1 + p_2 \in (0, 1)$
   g) $X \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho), \rho \in (-1, 1)$.
   h) $Y_i = \alpha + X_i \beta + \xi_i$, $\xi_i \sim N(0, \sigma^2), X_i's$ conhecidos.
   i) $Y_i \sim$ Bernoulli(p_i), $p_i = \dfrac{1}{1 + e^{\alpha + X_i \beta}}, X_i's$ conhecidos.

4. Para as distribuições da Questão 3), verifiquem se as estatísticas suficientes que você encontrou são também minimais e completas, através das respectivas definições.

5. Considere uma amostra aleatória $X_1, ..., X_n$ de X, em que

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0.$$

   Responda os itens abaixo

   a) Se μ for conhecido, encontre uma estatística suficiente, minimal e completa. Encontre sua distribuição.

   b) Se σ^2 for conhecido, encontre uma estatística suficiente para μ. Encontre sua distribuição. Esta estatística também é minimal e completa?

   c) Se $\boldsymbol{\theta}$ for desconhecido, encontre uma estatística suficiente para ele. Esta estatística seria completa? (Sugestão: tente achar uma função não nula dessa estatística, cuja esperança seja igual a 0).