ME - 210 B Probabilidade I
Primeiro semestre de 2010
Lista de exercícios I

1. Pesquise sobre as definições, propriedades e operações básicas sobre conjuntos (nas referências).

2. Sejam A, B, e C subconjuntos de um conjunto Ω. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique suas respostas. OBS $A \setminus B = A - B$.

   - (i) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$
   - (ii)$A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$
   - (iii)$A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cup C))$
   - (iv) $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$
   - (v) $A \cap B \cap C \subset (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
   - (vi) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subset A \cup B \cup C$
   - (vii)$(A \cup B) \setminus A = B$
   - (viii)$A \cap B^c \cap C \subset A \cup B$
   - (ix) $A \cup B \cup C = A^c \cap B^c \cap C^c$
   - (x) $(A \cup B)^c \cap C = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C)$
   - (xi)$(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C$
   - (xii)$(A \cup B)^c \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$

3. Sejam A, B, C e D subconjuntos de um conjunto Ω. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique suas respostas.

   - (i) $A \Delta A = \emptyset$
   - (ii) $A \Delta B = B \Delta A$
   - (iii) $A \Delta \emptyset = A$
   - (iv) $A \Delta \Omega = A^c$
   - (v)$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
   - (vi) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$:

- (vii) $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C) = A\Delta C$
- (viii) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cup B)$
- (ix) $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$
- (x) $(A \cap B^c)\Delta(A^c \cap B) = A\Delta B$
- (xi) $A\Delta B = C \Leftrightarrow A = B\Delta C$
- (xii) $A\Delta B = C\Delta D \Leftrightarrow A\Delta C = B\Delta D$
- (xiii) $A\Delta B = A^c\Delta B^c$.

4. A função indicadora de um subconjunto $A \subset \Omega$ é definida por:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

   Mostre que:

   - (i) $A = B \Leftrightarrow I_A = \mathbb{1}_B$
   - (ii) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
   - (iii)$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
   - (iv) $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A$.
   - (v) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
   - (vi) $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$

5. Quantas permutações diferentes existem das letras A, B, C, D, E, F

   - (a) que têm as letras A, B juntas em qualquer ordem?
   - (b) que têm a letra A em primeiro lugar ou a letra F em último?
   - (c) em que a letra A vem antes da letra B?
   - (d) em que a letra E não é a última?

6. Um pai compra 7 presentes diferentes (entre os quais, um videogame e um relógio) para dar a seus três filhos.

- (a) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes entre os filhos, se decide dar 2 presentes ao filho mais velho, 2 presentes ao filho do meio e 3 presentes ao mais novo?
- (b) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele resolve dar pelo menos um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?
- (c) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele decide dar exatamente um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?

7. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ $\sigma-$álgebras de conjuntos. Prove que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ também é uma $\sigma-$álgebra de conjuntos.