MI 416 -Introdução aos Modelos Lineares
Primeiro semestre de 2013
Lista de Exercícios I
Data da entrega: até o dia 01/04/2013, no começo ou no final da aula
Exercícios selecionados para a entrega: 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

1. Resolva TODOS os exercícios deixados em sala.
2. Considere o sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ e seja $\boldsymbol{A}^-$ uma inversa generalizada de $\boldsymbol{A}$. Mostre que:
   a) $\boldsymbol{AA}^-$ é idempotente.
   b) Uma condição necessária e suficiente para que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ seja consistente é que $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$.
   c) Uma solução geral do sistema consitente $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ é dada por $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA}^-)\boldsymbol{z}$, em que $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}^p$ é um vetor arbitrário. Além disso, toda solução do sistema tem essa forma.
3. Utilizando a notação usual, considere o modelo linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}(Y_{11}) \\ \mathcal{E}(Y_{12}) \\ \mathcal{E}(Y_{21}) \\ \mathcal{E}(Y_{22}) \end{bmatrix}$$

   a) Expresse os parâmetros do modelo em termos dos valores esperados $\mathcal{E}(Y_{ij})$.
   b) Repita o procedimento do item anterior sob as restrições i) $\alpha_1 = 0$, ii) $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.
   c) Repita o procedimento agora sob as reparametrizações i) $\beta_1 = \mu + \alpha_1$ e $\beta_2 = \mu + \alpha_2$, ii) $\beta_1 = \mu$ e $\beta_2 = \mu + \alpha_1$.

   Interprete os parâmetros em cada caso.
4. Seja $\boldsymbol{A}_{(m \times m)}$ uma matriz real e simétrica. Mostre que:
   a) $tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$, em que $\lambda_i, i = 1, ..., m$ são os autovalores de $\boldsymbol{A}$.
   b) $det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^m \lambda_i$.
   c) Se $\boldsymbol{P}$ for uma matriz ortogonal, os autovalores de $\boldsymbol{PAP}'$ são os mesmos de $\boldsymbol{A}$.
5. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ uma vetor aleatório tal que

$$Cov(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Responda os itens:

   a) Calcule a variância de $X_1 - 2X_2 + X_3$.

b) Calcule $Cov(\boldsymbol{Z})$ em que $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)$ com $Z_1 = X_1 + X_2$ e $Z_2 = X_1 + X_2 + X_3$.

6. Considere o modelo linear normal homocedástico em sua forma matricial, visto em sala. Defina $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$, $\widehat{Y} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{Y}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{C}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{M}_i$ em que $\boldsymbol{C}_{i(a_i \times p)}$ são matrizes não-aleatórias tais que $r(\boldsymbol{C}_i) = a_i < p$ e $\boldsymbol{M}_{i(a_i \times 1)}$ são vetores não aleatórios, $i = 1, 2...$. Obtenha as distribuições conjuntas de i) $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ii) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i$ iii) $(\widehat{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{R})'$, iv) $(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2)$ e v) $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)$.

7. Os dados contidos no arquivo Braga (1998) (fonte: http://www.ime.usp.br/ jmsinger/doku.php?id=start) são provenientes de um estudo na área de Cardiologia. O objetivo é comparar as curvas de variação do consumo de oxigênio no ponto de compensação respiratório (PCR) em função da carga utilizada na esteira ergométrica para para pacientes com diferentes etiologias cardíacas. Responda os itens:

   a) Especifique (matricial e escalarmente) um modelo linear que permita comparar as curvas de variação do consumo de oxigênio no ponto de compensação respiratório (PCR) em função da carga utilizada na esteira ergométrica para para pacientes com diferentes etiologias cardíacas. Interprete os parâmetros. Admita que não é possível, no PCR, ter-se pacientes submetidos à uma carga nula.

   b) Especifique (escalar e matricialmente) pelo menos duas hipóteses de interesse, interpretando-as em termos do problema.

   c) Faça uma análise descritiva dos dados.

8. Os dados do artigo Tormin (2000) (fonte: http://www.ime.usp.br/ jmsinger/doku.php?id=start) são provenientes de um estudo na área de Ortodontia. Um dos objetivos era comparar as distribuições do dâmetro mesiodistal de incisivos. O pesquisador tinha interesse em saber se as distribuições dependiam do arco (superior ou inferior) e da posição (lateral ou central). Especifique (matricial e escalarmente) um modelo linear que permita avaliar a influência desses dois fatores e de sua interação nas distribuições mencionadas. Utilize a parametrização casela de referência (sendo a referência o arco superior e a posição central) e interprete os parâmetros em cada caso. Especifique (escalar e matricialmente) as hipóteses de interesse, interpretando-as em termos do problema.. Faça uma análise descritiva dos dados.

9. Considere o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \xi_i, i = 1, 2, ..., n$, em que $\xi \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Encontre a forma escalar dos estimadores de MQO e as respectivas distribuições marginais.

10. Demonstre o seguinte resultado, conhecido como Teorema de Cramér-Wold: Um vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_p)$ tem distribuição Normal p-variada se e somente se $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{X}$ tem distribuição normal univariada para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^p$.