ME - 310 Probabilidade II
Prof. Caio Azevedo
Verificação de Conhecimento

1. Escreva tudo o que você já viu sobre vetores aleatórios: funções conjuntas, independência, covariância, correlação, distribuições multinomial e normal multivariada.

2. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$. Responda os itens:

   a) Calcule a f.g.m (função geradora de momentos) de X.

   b) Com base no item a), prove que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, em que f_X é a densidade de X.

   c) Calcule a média e a variância de X.

   d) Calcule a moda de X.

3. Seja $X \sim$ geométrica$(p), p \in (0,1)$, onde X representa o número necessário de tentativas para se obter o primeiro sucesso em provas (ensaios) independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Responda os itens:

   a) Deduza a função de probabilidade de X e denote-a por $p_X(x)$. Caso não consiga deduzí-la, apenas escreva-a.

   b) Calcule a f.g.m (função geradora de momentos) de X. Sugestão: lembre-se de que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-b}$, se $a_{i+1} = a_i b$, $i = 1, 2, ...$ (uma PG inifita de razão b).

   c) Prove que $\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1$.

   d) Calcule a média e a variância de X.

4. Seja $Y \sim$ geométrica$(p), p \in (0,1)$, mas agora Y representando o número de fracassos até se obter o primeiro sucesso em provas (ensaios) independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Responda os itens:

   a) Escreva Y em função de X e deduza sua função de probabilidade..

   b) Prove que $\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = 1$.

   c) Calcule a média e a variância de X.

5. Sejam H e G duas funções de distribuição acumuladas. Prove que $F = \alpha G + (1-\alpha)H, \alpha \in (0,1)$ também o é, ou seja, prove que:

   (a) $0 \leq F(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathcal{R}$.

   (b) F é não-decrescente, ou seja, $\forall x < y \in \mathcal{R} \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

   (c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.