Processos de média móveis (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

Processos de Médias Móveis

- Estudamos, até o momento, a classe AR(p) de modelos der regressão para ST, em que as observações de instantes anteriores influenciam, diretamente, na observação presente (vejam os slides no site do curso, aqui).
- Veremos agora uma outra classe, na qual a influência direta (no modelo) dá-se através dos erros (choques/ruídos), os chamados processos de Médias Móveis de ordem q (MA(q)).
- Com efeito, a forma como as observações anteriores influenciam a observação presente é diferente entre as duas classes de modelos.

Processo MA(1)

- Um processo de médias móveis de ordem um (1) com esperança μ, denotado por $MA(1)$, é definido como:

$$Y_t = \mu + \theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2).$$

- Podemos provar (Exercício, veja também aqui) que (e no slide seguinte)

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), \text{ se } k = 0 \\ \theta\sigma^2, \text{ se } k = 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Processo MA(1)

- Cont.:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, \text{ se } k = 0 \\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}, \text{ se } k = 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Pela FAC (resultado acima) temos que a memória do processo MA(1) é de ordem 1.
- Exercício: Prove que no processo MA(1), θ determina de maneira única $\rho(1)$ mas não o contrario.

MA(1) - exemplos

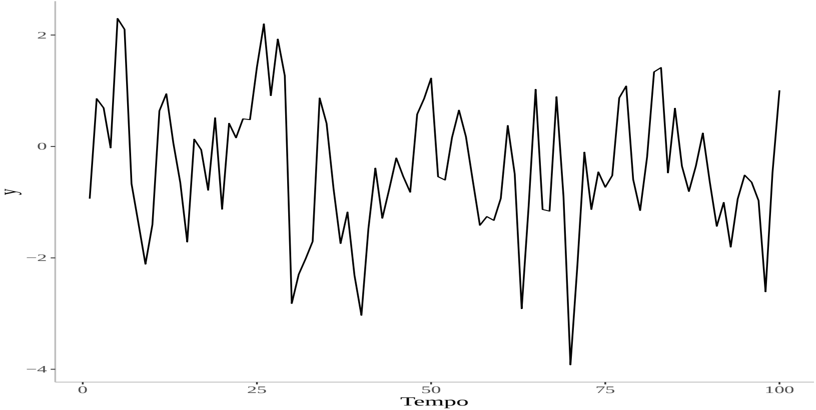

Figura: Série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($\mathrm{n} = 100$).

MA(1) - exemplos

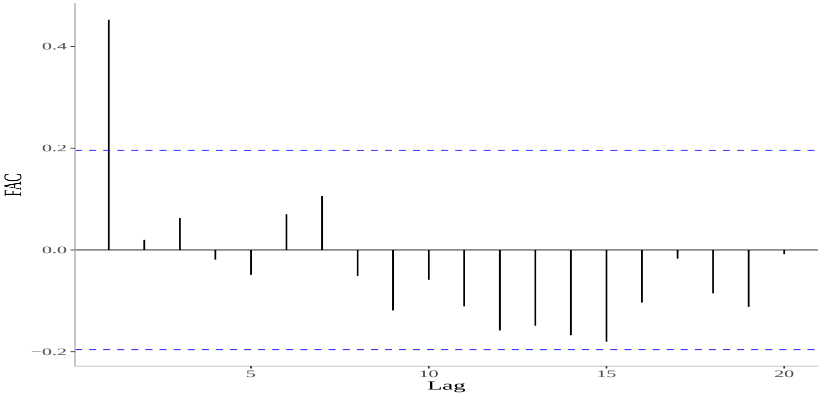

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $= 100$).

MA(1) - exemplos

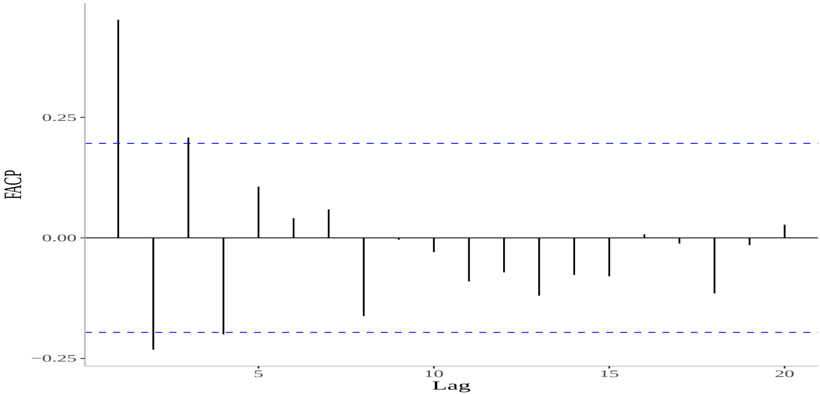

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

MA(1) - exemplos

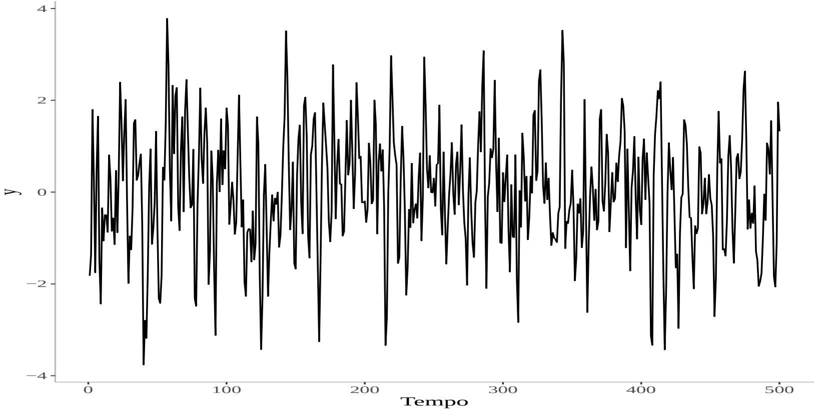

Figura: Série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 500$).

MA(1) - exemplos

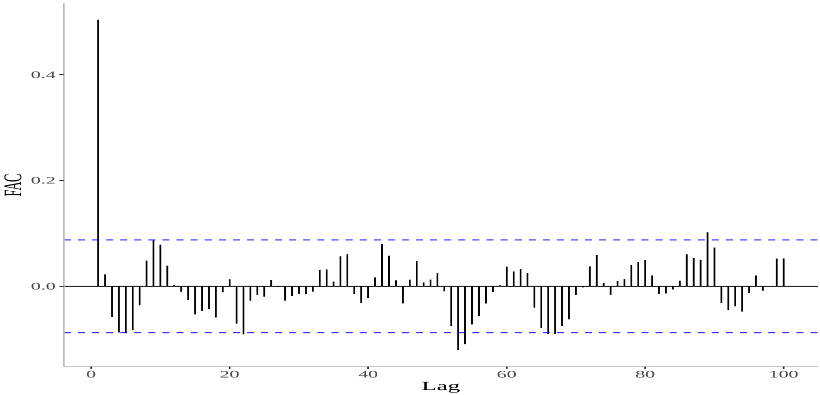

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

MA(1) - exemplos

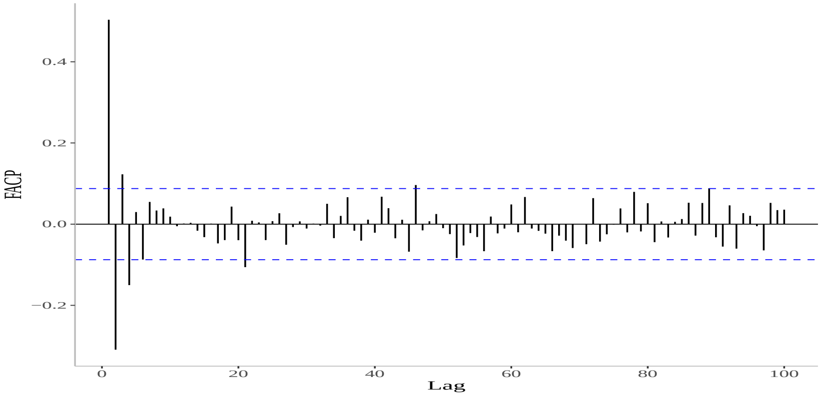

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $= 500$).

MA(1) - exemplos

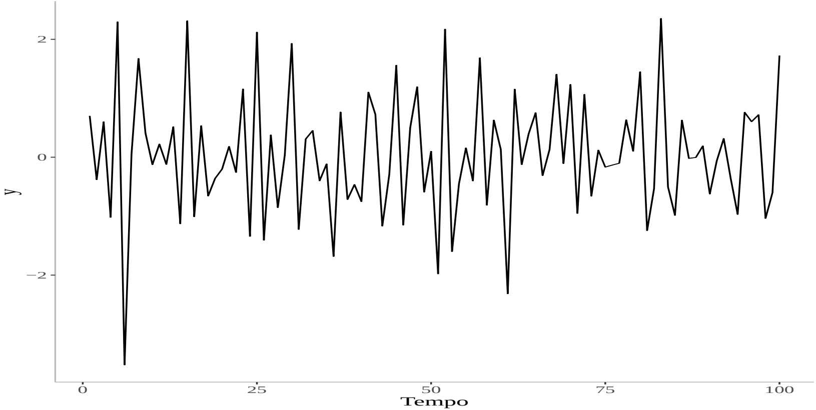

Figura: Série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

MA(1) - exemplos

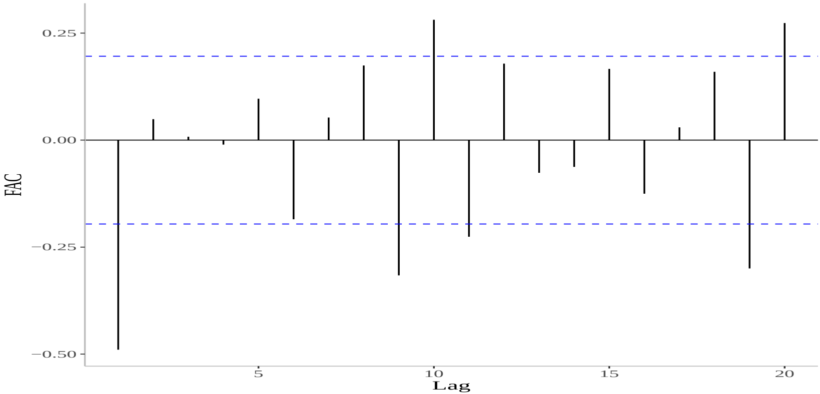

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

MA(1) - exemplos

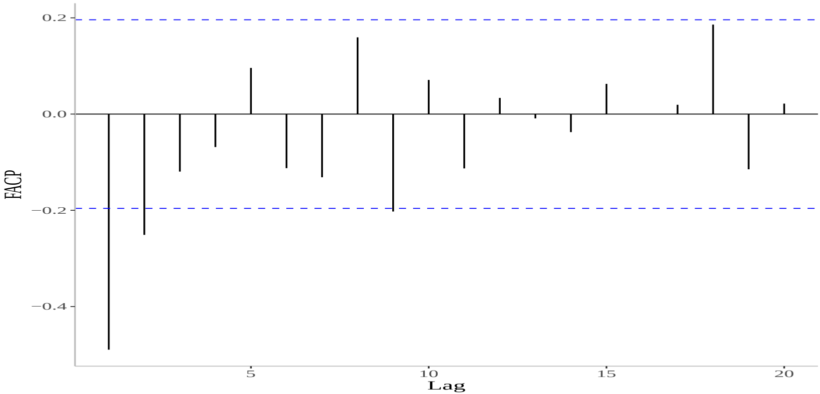

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

MA(1) - exemplos

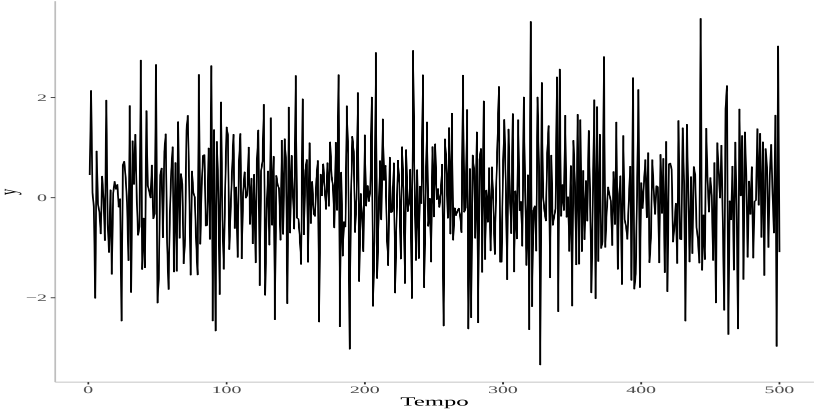

Figura: Série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(1) - exemplos

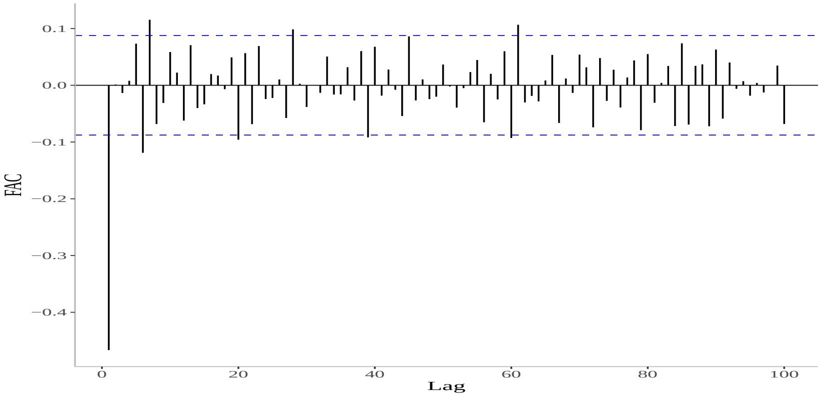

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(1) - exemplos

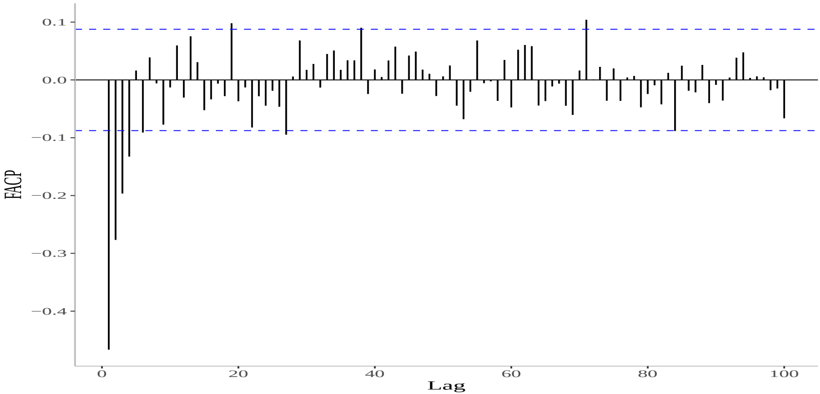

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(1) com $\theta = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

Processo MA(2)

- Um processo de médias móveis de ordem um (2) com esperança μ, denotado por $MA(2)$, é definido como:

$$Y_t = \mu + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2).$$

- Exercício: calcule $\gamma(k)$ e $\rho(k)$ para o processo $MA(2)$.

MA(2) - exemplos

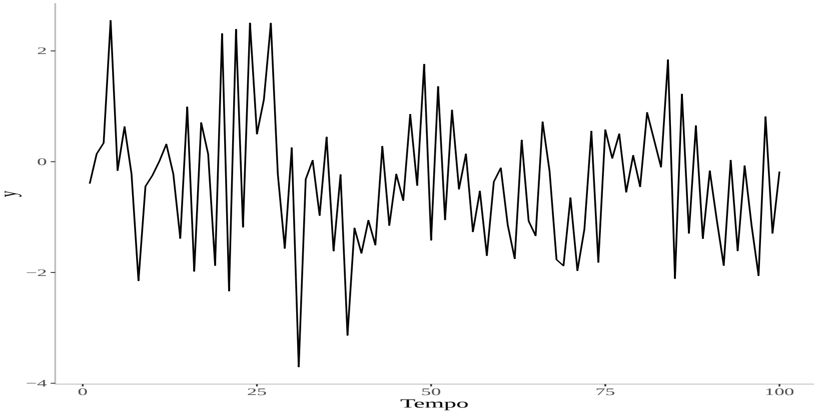

Figura: Série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

MA(2) - exemplos

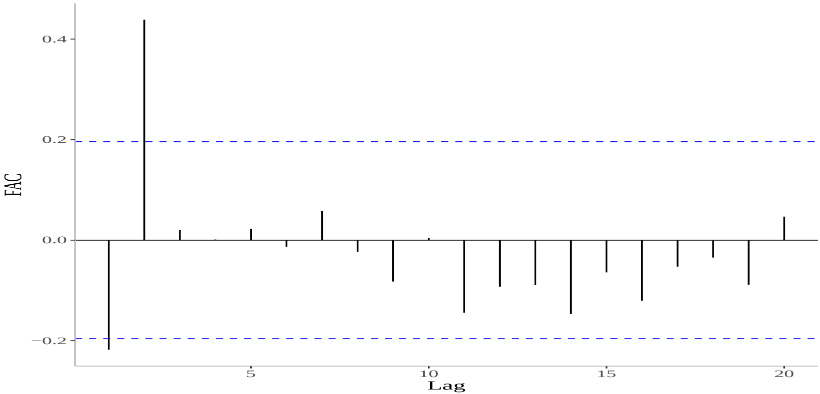

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

MA(2) - exemplos

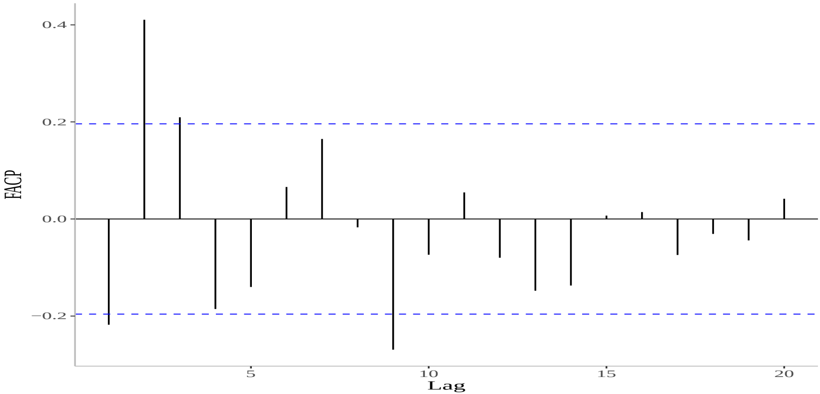

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

MA(2) - exemplos

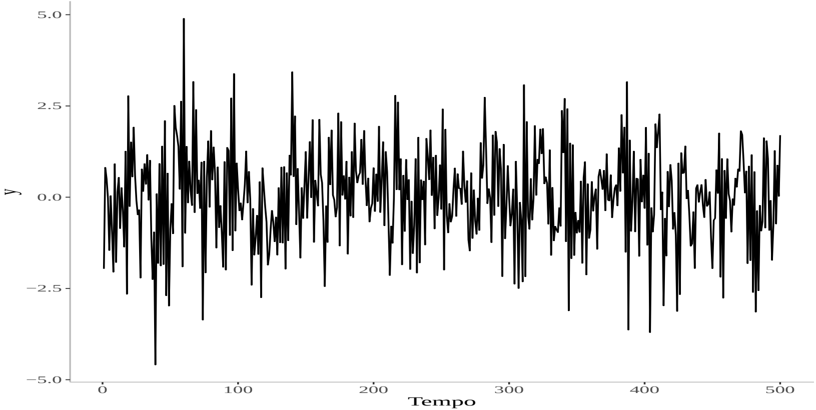

Figura: Série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $= 500$).

MA(2) - exemplos

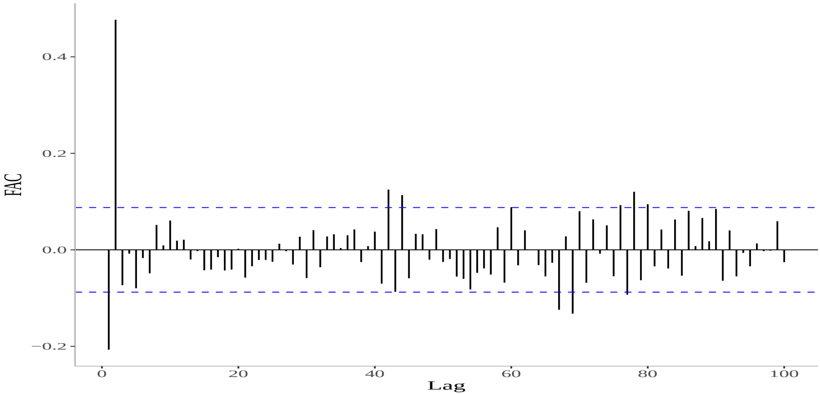

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(2) - exemplos

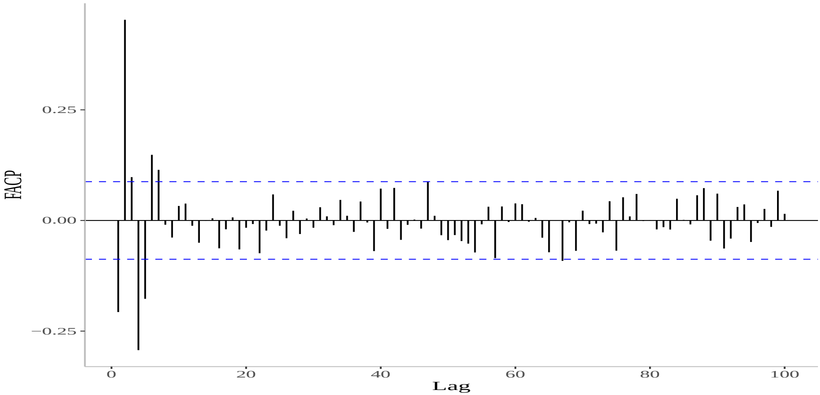

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = -0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(2) - exemplos

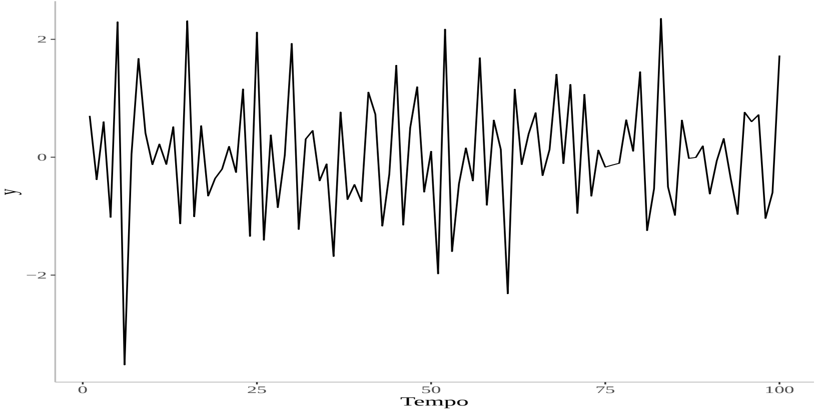

Figura: Série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

MA(2) - exemplos

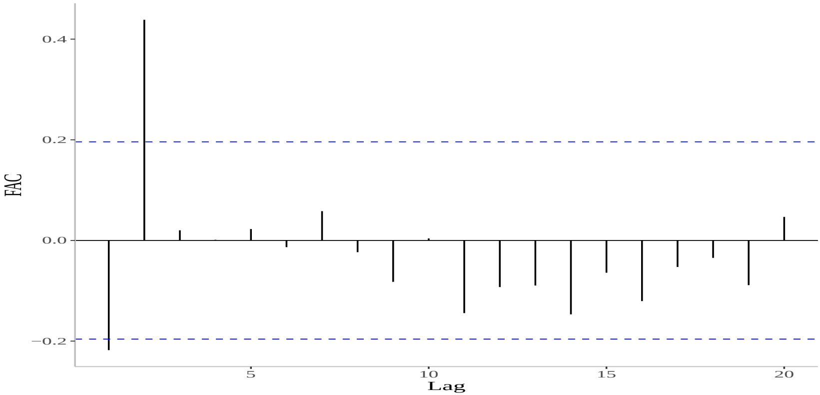

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

MA(2) - exemplos

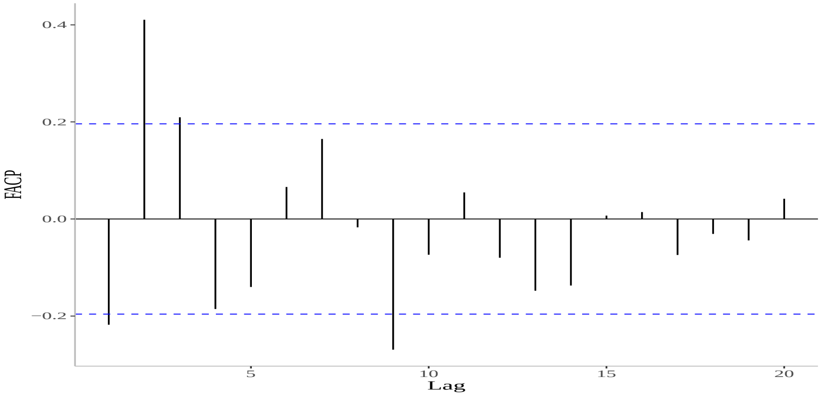

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

MA(2) - exemplos

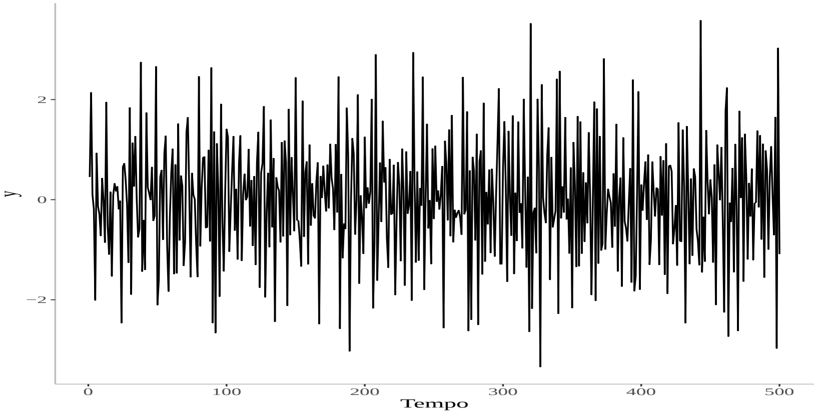

Figura: Série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(2) - exemplos

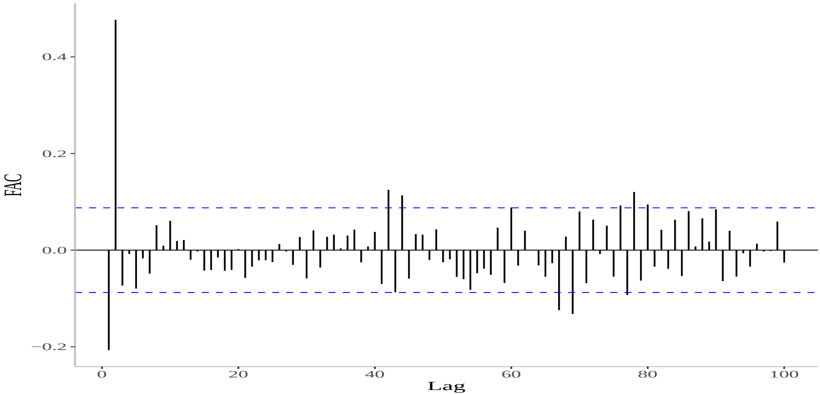

Figura: FAC para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

MA(2) - exemplos

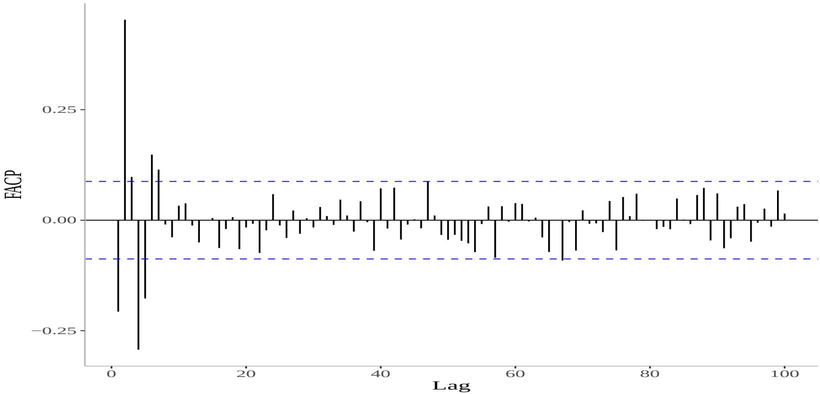

Figura: FACP para a série simulada de um processo MA(2) com $\theta_1 = 0,7; \theta_2 = 0,2$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

Processo (geral) MA(q)

- Dizemos que $\{Y_t\}$ é um processo de médias móveis (MA) de ordem q (MA(q)) com média μ se for definido como:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q} + \epsilon_t, \ \epsilon_t \sim RB(0,\sigma^2), \\
Y_t - \mu &= \theta(B)\epsilon_t,
\end{aligned}
$$

  em que $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ é o polinômio de MA.

- A primeira propriedade observada nesses processos é que ele é causal.

FAC

- Sem perda de generalidade considere $\mu = 0$ e um parâmetro adicional $\theta_0 = 1$, logo a Função de autocovariância é dada por $E(Y_t Y_{t-k})$ e

$$
\begin{aligned}
Y_{t-k} &= \theta_0\epsilon_{t-k} + \theta_1\epsilon_{t-k-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-k-q} \\
Y_t Y_{t-k} &= (\theta_0\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q})(\theta_0\epsilon_{t-k} + \theta_1\epsilon_{t-k-1} + \\
&\quad \cdots + \theta_q\epsilon_{t-k-q}) \\
&= \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q}\theta_i\theta_j\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-k-j} \\
E(Y_t Y_{t-k}) &= \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q}\theta_i\theta_j E(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-k-j}) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q}\theta_i\theta_j\gamma_\epsilon(i-k-j).
\end{aligned}
$$

FAC

- Porém note que como ϵ_t é ruído branco, então $\gamma_\epsilon(i-k-j) = \sigma^2$ quando $i-k-j=0 \Longrightarrow i = k+j$ e $\gamma_\epsilon(i-k-j) = 0$ caso contrário. Logo, temos que

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}.$$

- Portanto, com base nesse resultado temos que o processo MA(q) é sempre estacionário.
- Além disso, temos que a memória do processo é de ordem q.

FAC

- Assim, temos que:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2\right), \text{ se } k = 0 \\ \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}\right), \text{ se } k \leq q \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

FAC

- Assim, temos que:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, \text{ se } k = 0 \\ \sum_{i=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2\right), \text{ se } k \leq q \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Invertibilidade

- Dizemos que um processo é invertível se pode ser escrito como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} = \epsilon_t,$$

em que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

- O processo MA(q) é invertível se a solução z de $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q = 0$ estiver fora do círculo unitário, ou seja, se $|z| > 1$.

FACP

- Considere o processo MA(q) invertível e

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j Y_{t-j} &= \epsilon_t \\ Y_t &= -\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j Y_{t-j} + \epsilon_t. \qquad (1)\end{aligned}$$

- Para o processo MA(q), pela equação (1) temos que a FACP desse processo nunca é zero, diferentemente do que ocorre para o modelo AR(p).

Comportamento da FAC e FACP

- Na práticas a FAC e FACP nos auxiliam a identificar se um processo adequado para a modelagem daquela série é AR(p) ou MA(q).

	AR(p)	MA(q)
FAC	decai exponencialmente	é zero de $q+1$ em diante
FACP	é zero de $p+1$ em diante	decai exponencialmente

- Note que os comportamentos descritos acima devem ser verificados em relação a $|\rho(h)|, h = 1, 2, \ldots$