Processos autoregressivos (parte 2)

Prof. Caio Azevedo

Modelos AR(2)

- Um processo $\{Y_t\}$ é dito ser $AR(2)$ se satisfaz:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t. \tag{1}$$

- Pode-se demonstrar que as condições de causalidade do processo AR(2), em termos dos coeficientes ϕ_1 e ϕ_2, são:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1, -1 < \phi_2 < 1.$$

AR(2) - características

- Note que o modelo (1) pode ser (re)escrito como:

$$Y_t = \phi_1 B Y_t + \phi_2 B^2 Y_t + \epsilon_t \rightarrow \phi(B) Y_t = \epsilon_t \tag{2}$$

em que: $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$.

- No exemplo a seguir ilustra-se como avaliar a estacionariedade, a causalidade e encontrar a representação $MA(\infty)$, do processo $AR(2)$.

AR(2) - características

- Considere o processo

$$Y_t = 0,75Y_{t-1} - 0,125Y_{t-2} + \epsilon_t.$$

- O polinômio autoregressivo avaliado em z, em geral é um número complexo, em que $\phi(z) = 1 - 0,75z + 0,125z^2$.
- Além disso, $\phi(z) = 0 \iff z^2 - 6z + 8 = 0$, de forma que as respectivas raízes são $z_1 = 4$ e $z_2 = 2$.
- Como estas raízes satisfazem $|z| > 1$, então o processo é estacionário e causal.

AR(2) - características

- No R é fácil encontrar as raízes de um polinômio de grau (genérico) $n-1$, ou seja

$$p(x) = z_1 + z_2 x + ... + z_n x^{n-1}$$

  através da função

  `polyroot(z)`

  em que $z = (z_1, z_2, ..., z_n)'$.

- Caso anterior

```
polyroot(c(1,-0.75,0.125))
```

```
[1] 2+0i 4-0i
```

AR(2) - características

- Para encontrar a representação $MA(\infty)$ (veja novamente aqui):

$$Y_t = \Phi(B)\epsilon_t, \tag{3}$$

em que $\Phi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...$; note que da Equação (2), temos que:

$$Y_t = \frac{1}{1 - 0,75B + 0,125B^2}\epsilon_t. \tag{4}$$

- Assim, igualando (3) a (4), temos a seguinte igualdade de polinômios:

$$1 = (1 - 0,75B + 0,125B^2)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...)$$

AR(2) - características

- Portanto (provar),

$$
\begin{aligned}
1 &= \psi_0 \\
0 &= \psi_1 - \frac{3}{4}\psi_0, \psi_1 = \frac{3}{4} \\
0 &= \psi_2 - \frac{3}{4}\psi_1 + \frac{1}{8}\psi_0.
\end{aligned}
$$

- De uma forma geral

$$0 = \psi_k - \frac{3}{4}\psi_{k-1} + \frac{1}{8}\psi_{k-2}.$$

- Esta é uma equação em diferenças de segundo grau e para resolvê-la podemos usar o seguinte resultado (próximo slide)

AR(2) - características

- Resultado: Equação em diferenças do segundo grau: Sejam a e b constantes. As soluções da equação em diferenças de segundo grau:

$$\tau(k) = a\tau(k-1) + b\tau(k-2), k \geq l,$$

dependem da natureza das raízes de $1 - az - bz^2 = 0$. Sejam m_1 e m_2 estas raízes, então:

  - Se as raízes são reais e diferentes, $\tau(k) = c_1 \left(\frac{1}{m_1}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{m_2}\right)^k$.
  - Se as raízes são reais e iguais ($m_1 = m_2 = m$), $\tau(k) = (c_1 + c_2 k)\left(\frac{1}{m}\right)^k$.

AR(2) - características

- Cont.:
  - Se as raízes são complexas, $\alpha - i\beta, \alpha + i\beta$, então

$$\begin{aligned} \tau(k) &= c_1 \left(\frac{1}{r}\right)^k cos\left(\theta k + 2\right) \\ r &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta &= arccos\left(\frac{\alpha}{r}\right) = arcsen\left(\frac{\beta}{r}\right), \end{aligned}$$

em que todas as constantes são determinadas a partir das condições inicias $\tau(l-1), \tau(l-2)$.

Voltando ao exemplo anterior

- Voltando ao exemplo anterior, temos que as raízes da equação $1 - 0,75z + 0,125z^2 = 0$ são $m_1 = 4$ e $m_2 = 2$, as quais são diferentes e reais, então:

$$\psi_k = c_1 \left(\frac{1}{4}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{5}$$

- Para encontrar as constantes c_1 e c_2 utilizamos as condições iniciais $\psi_0 = 1$ e $\psi_1 = 3/4$ (basta fazer $k = 0$ e $k = 1$ na Equação (5)) obtendo:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ \frac{3}{4} &= \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2. \end{aligned}$$

Voltando ao exemplo anterior

- Assim, resolvendo o sistema de equações do slide anterior, obtemos - $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$ e, portanto:

$$\psi_k = -1\left(\frac{1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

- Podemos notar que os coeficientes $\{\psi_k\}$ decaem exponencialmente.

AR(2) - exemplos

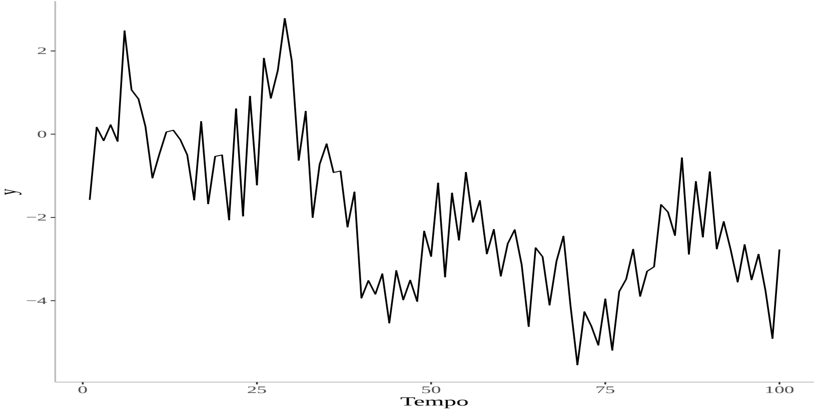

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

AR(2) - exemplos

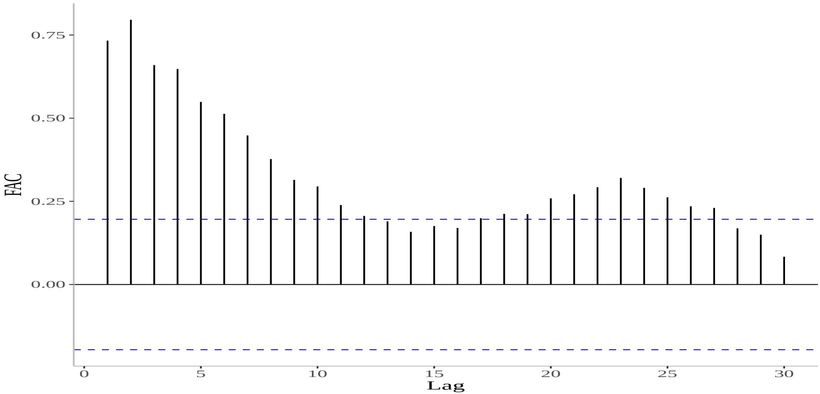

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

AR(2) - exemplos

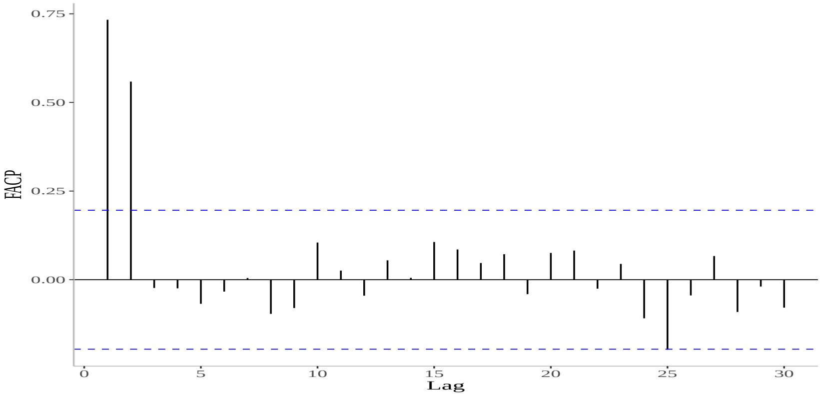

Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

AR(2) - exemplos

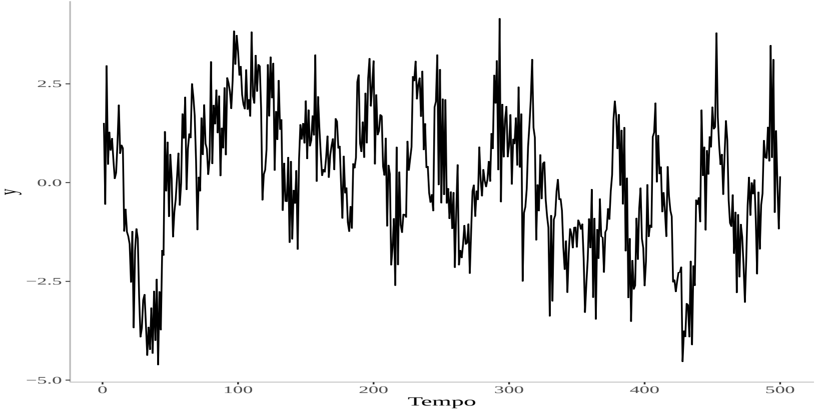

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

AR(2) - exemplos

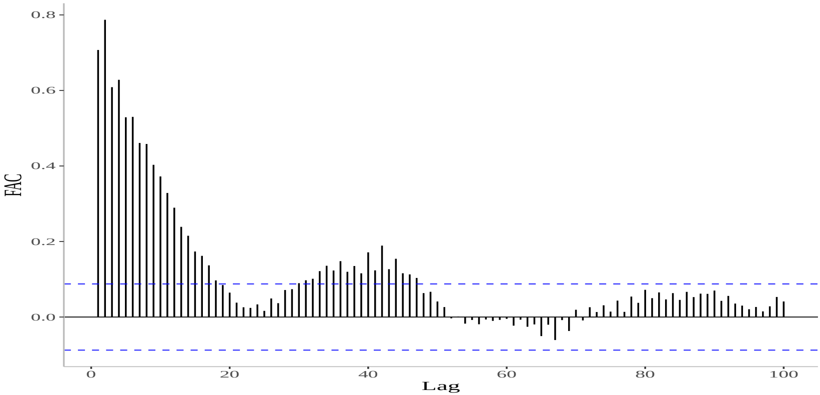

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

AR(2) - exemplos

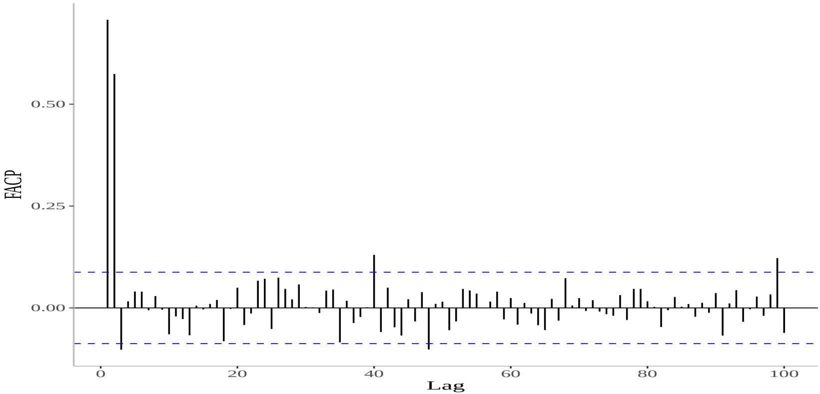

Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

AR(2) - exemplos

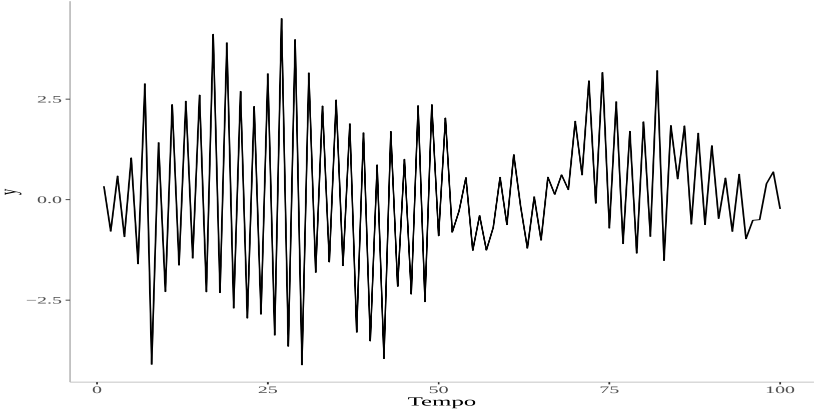

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

AR(2) - exemplos

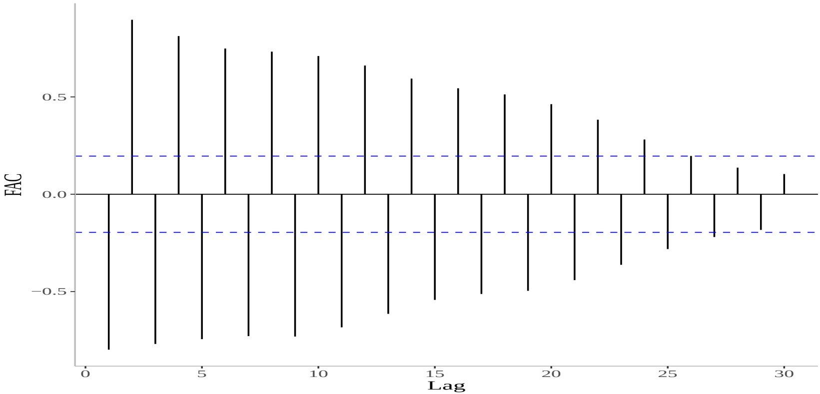

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

AR(2) - exemplos

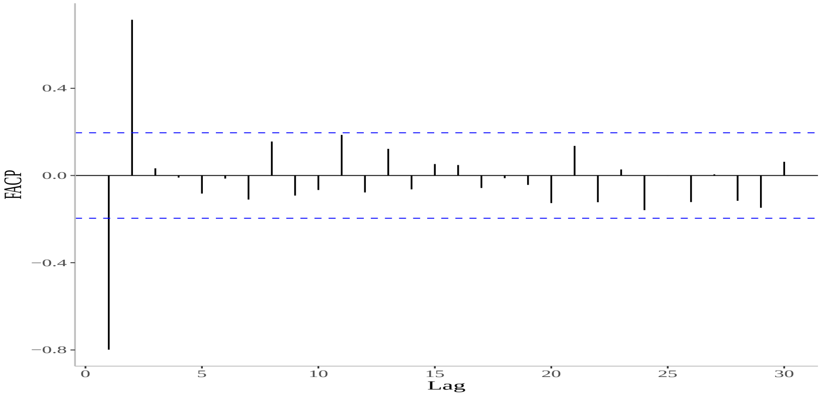

Figura: FACP para série simulada de um processo AR(1) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

AR(2) - exemplos

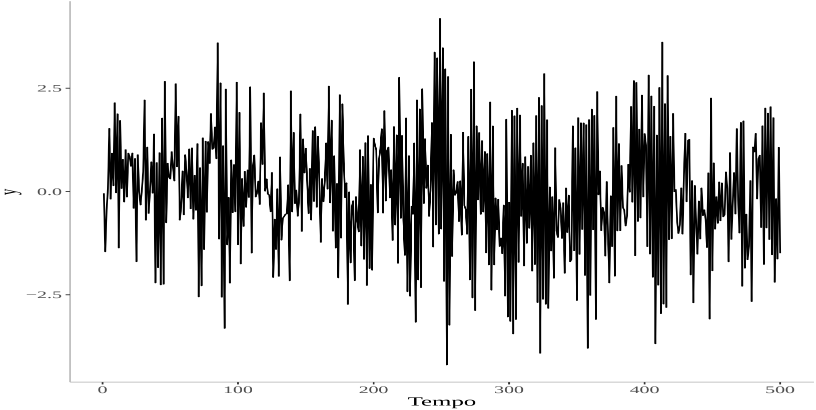

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

AR(2) - exemplos

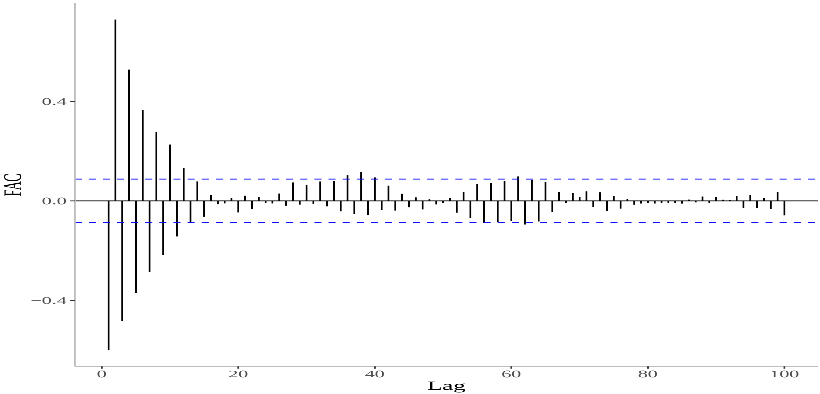

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

AR(2) - exemplos

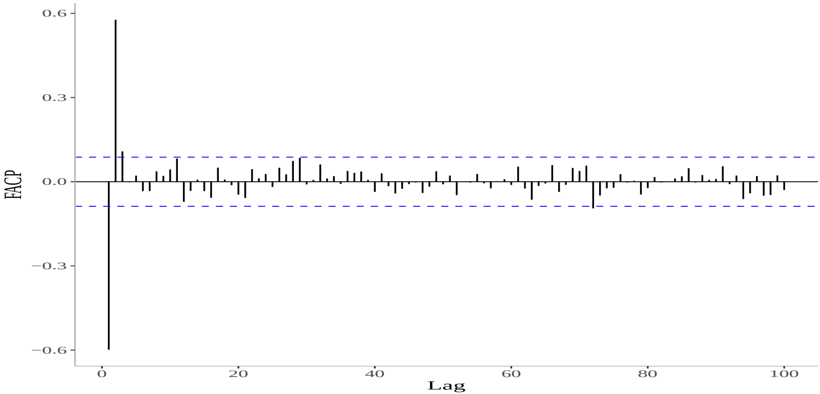

Figura: FACP para série simulada de um processo AR(1) com $\phi_1 = -0,3, \phi_2 = 0,6$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

AR(2) - exemplos

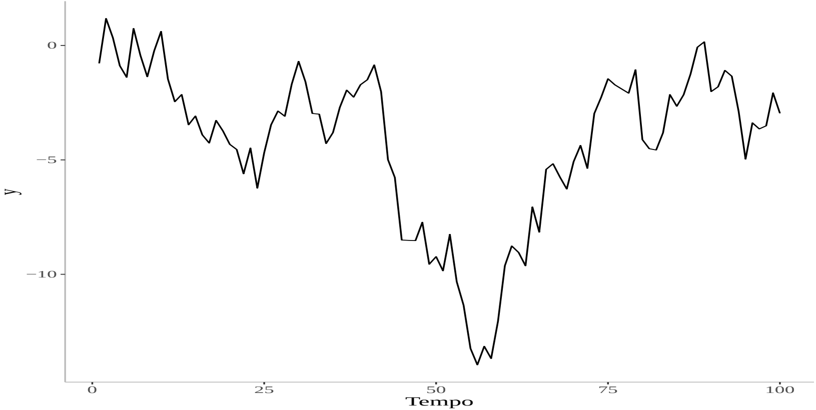

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

AR(2) - exemplos

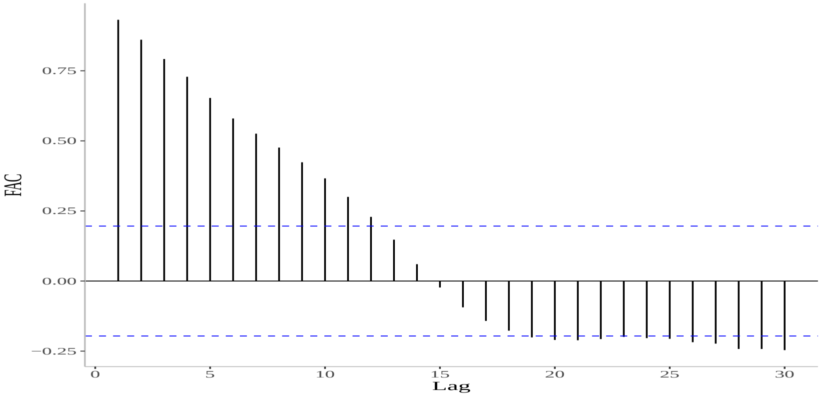

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 100).

AR(2) - exemplos

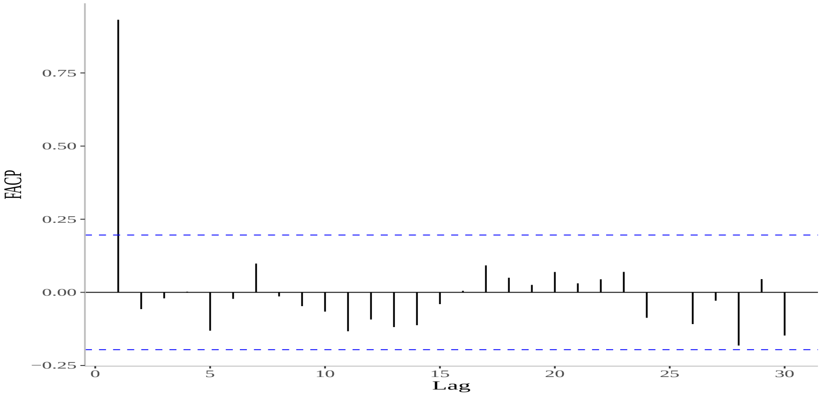

Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 100).

AR(2) - exemplos

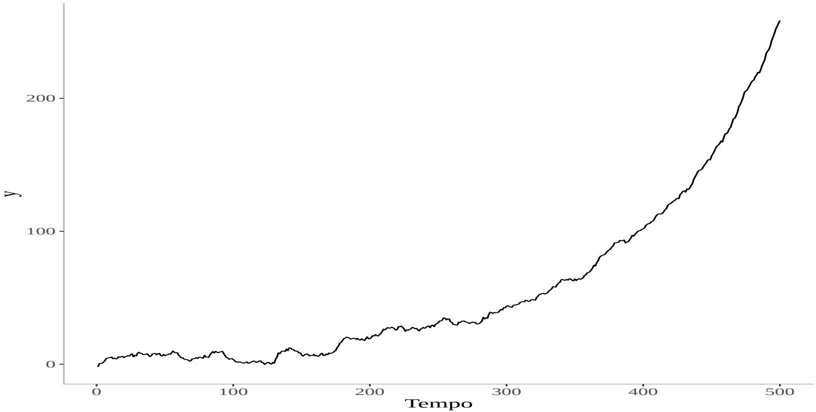

Figura: Série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $= 500$).

AR(2) - exemplos

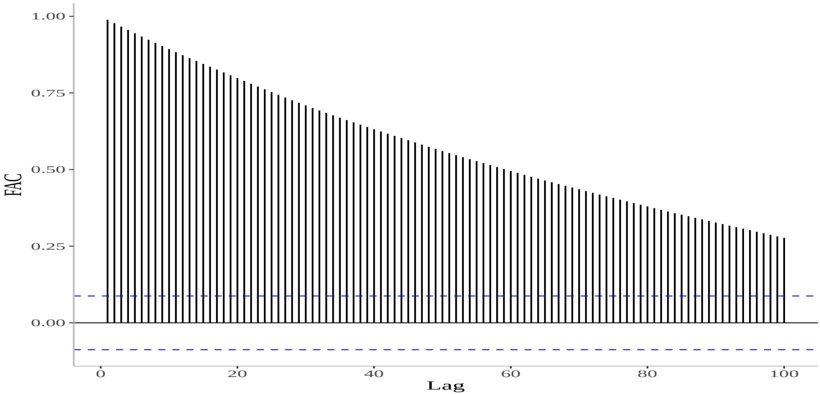

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n $=$ 500).

AR(2) - exemplos

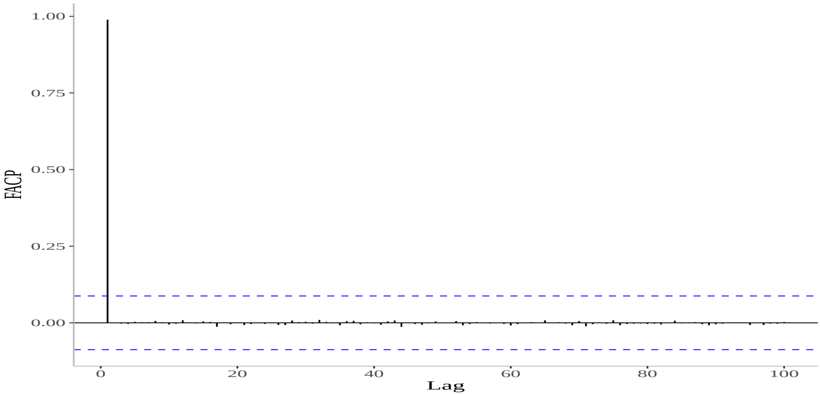

Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(2) com $\phi_1 = 1,01, \phi_2 = 1,02$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ (n = 500).

Comentários

- À rigor os processos autoregressivos são assim chamados, se forem estacionários.
- Pode-se utilizar a estrutura apresentada, ainda que não seja estacionária. Contudo, algumas propriedades, essencialmente, deixam de valer.

Comentários

- Note também que a perda da causalidade, nos termos vistos, implica na dependência das observações presentes/passadas e os erros (choques/ruídos) do futuro, o que pode ser difícil de ser justificado do ponto de vista teórico.
- Além do próprio gráfico de ST (que pode apresentar variados comportamentos), podemos utilizar a FAC (decaimento exponencial, ou alternância no decaimento) e da FACP (essencialmente a significância segue a ordem do processo (p)) para justificarmos o uso de modelos AR.