

Processos autoregressivos (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Uma classe de modelos para ST (estacionários, sob algumas condições) mais importantes é a de modelos autoregressivos (de ordem p , $p \in \{1, 2, \dots\}$).
- Um modelo é dito ser autoregressivo de ordem p se para qualquer t , Y_t é a variável resposta e as “covariáveis” são Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p} (note que as covariáveis também são variáveis aleatórias), diferentemente do que fora visto em [Regressão](#).

Características

- Mais especificamente, temos que:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$\rightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t$$

$$\rightarrow Y_t - \phi_1 B Y_t - \dots - \phi_p B^p Y_t = \epsilon_t$$

$$\rightarrow \phi(B) y_t = \epsilon_t,$$

$$\text{em que } \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p.$$

- Um processo $AR(p)$ é estacionário se e somente se as raízes de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ estão fora do círculo unitário. Ou seja, se a solução de $\phi(z) = 0$ satisfaz $|z_j| \neq 1, j = 1, 2, \dots, p$.

Características

- Dizemos que um processo qualquer é causal se a observação atual Y_t depender apenas de erros (choques/ruídos) presentes e passados ($\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots$), mas não de futuros. Conseqüentemente processos $MA(\infty)$ são causais, o que leva à:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, \epsilon_{t+k}) &= \text{Cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \epsilon_{t+k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \text{Cov}(\epsilon_{t-j}, \epsilon_{t+k}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \gamma_{k+j} = 0. \end{aligned}$$

- Um processo $AR(p)$ é causal se e somente se a solução de $\phi(z) = 0$ satisfaz $|z_j| > 1, j = 1, 2, \dots, p$.

AR(1)

- Por enquanto, discutiremos dois casos particulares do $AR(p)$, o $AR(1)$ e $AR(2)$, que servirão, entre outros objetivos, para ilustrar algumas propriedades. Primeiro estudaremos o modelo $AR(1)$.
- Um processo $\{Y_t\}$ é dito ser $AR(1)$ se satisfaz:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

- Note que ele pode ser escrito como $\phi(B)Y_t = \epsilon_t$ em que $\phi(B) = 1 - \phi B$.

AR(1) - características

- O processo AR(1) tem solução estacionária se e somente se:

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \implies z = \frac{1}{\phi} \iff |z| = \frac{1}{|\phi|} \neq 1 \iff |\phi| \neq 1. \quad (1)$$

- De (1) temos que o processo é causal se $|\phi| < 1$. Neste caso, **já foi demonstrado** que se $|\phi| < 1$ então $\{Y_t\}$ pode ser escrito como um MA(∞), em que $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}$ e, portanto, é causal.

AR(1) - características

- Podemos demonstrar que se $|\phi| > 1$ o processo AR(1) não é causal, notando que:

$$Y_{t+1} = \phi Y_t + \epsilon_{t+1},$$

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi^{-1} Y_{t+1} - \phi^{-1} \epsilon_{t+1} = \phi^{-1} (\phi^{-1} Y_{t+2} - \phi^{-1} \epsilon_{t+2}) - \phi^{-1} \epsilon_{t+1} \\ &= \phi^{-2} Y_{t+2} - \phi^{-2} \epsilon_{t+2} - \phi^{-1} \epsilon_{t+1}, \end{aligned}$$

- Por indução, podemos provar que (Y_t depende de erros futuros):

$$Y_t = \phi^{-k} Y_{t+k} - \sum_{i=1}^k \phi^{-i} \epsilon_{t+i}.$$

AR(1) - características

- Note que se $|\phi| > 1$, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi^{-k} Y_{t+k} - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \phi^{-i} \epsilon_{t+i},$$
$$Y_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-i} \epsilon_{t+i},$$

e portanto $\{Y_t\}$ não é causal.

AR(1) - exemplos

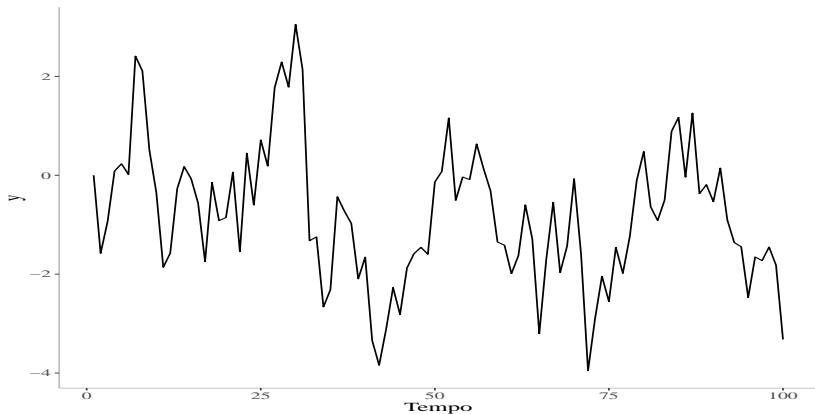


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

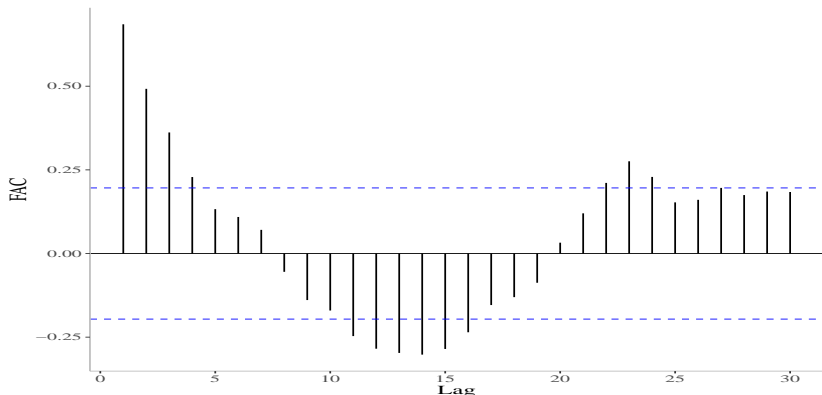


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

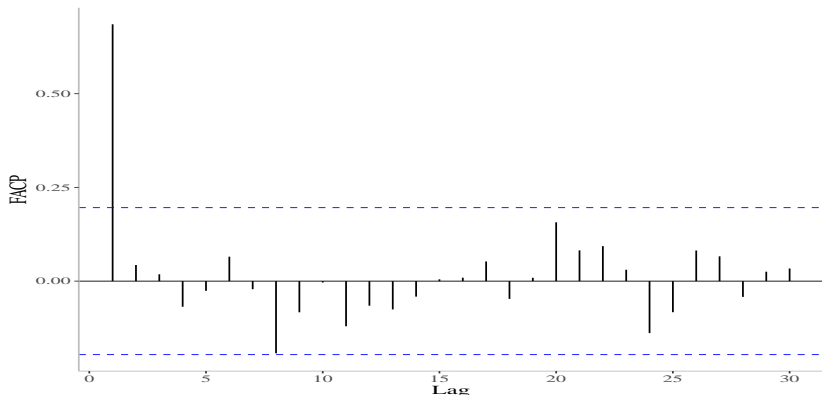


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

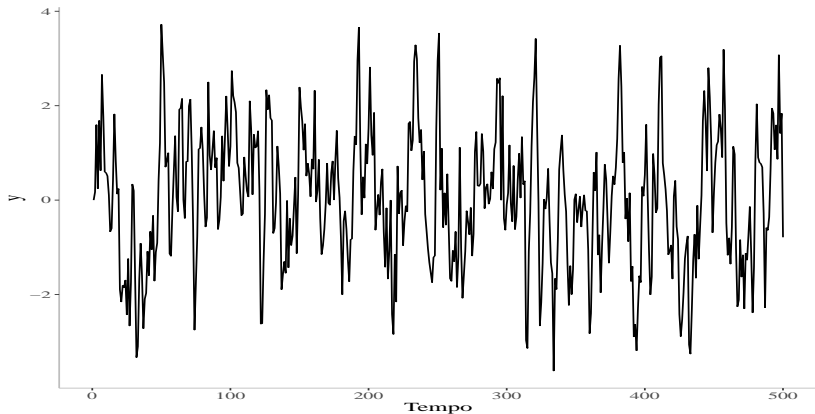


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

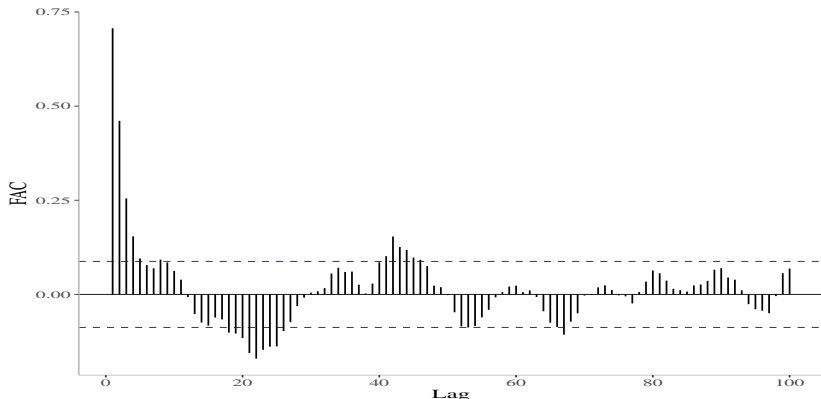


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

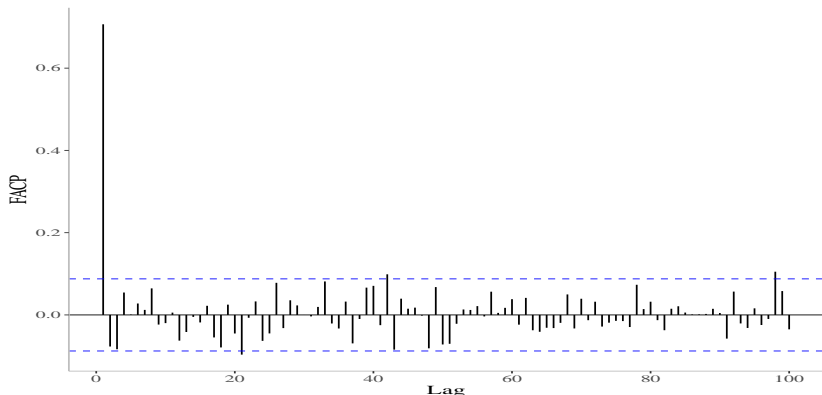


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

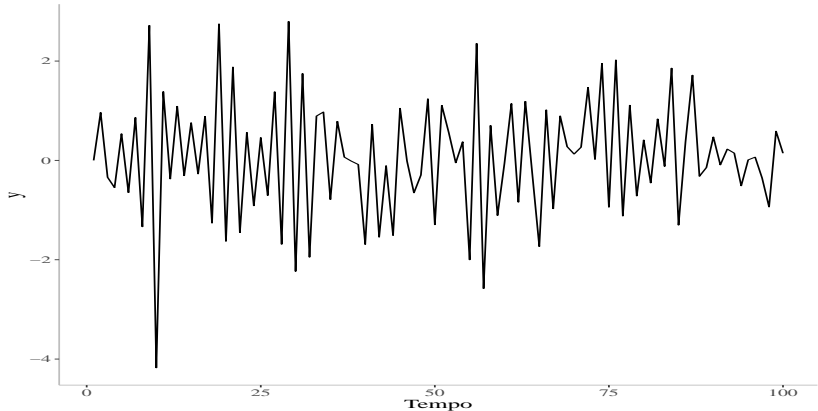


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

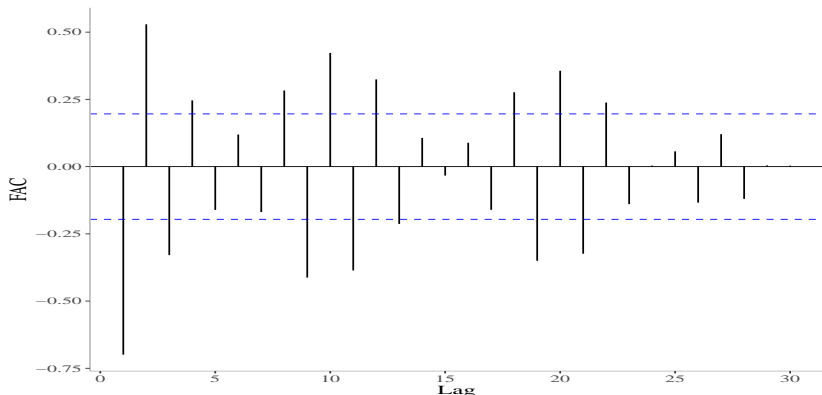


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0.7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

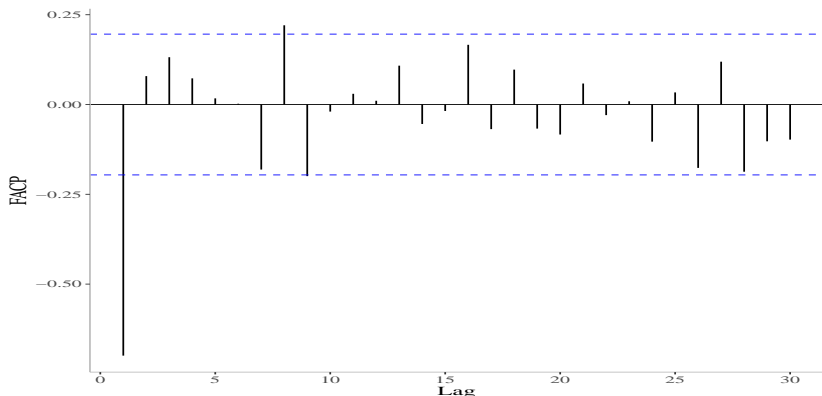


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

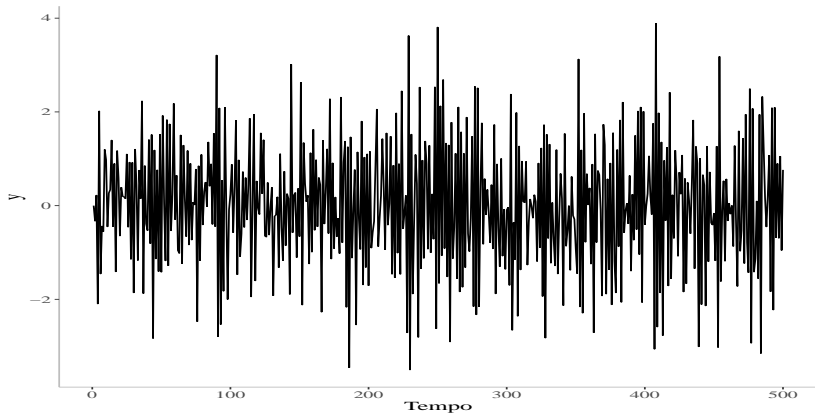


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

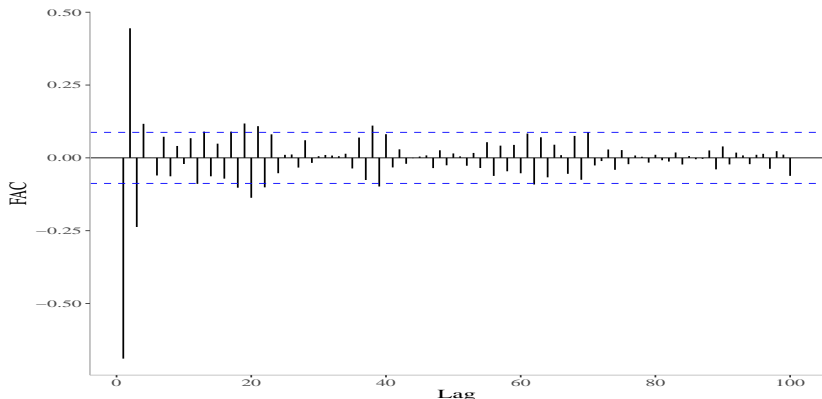


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0.7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

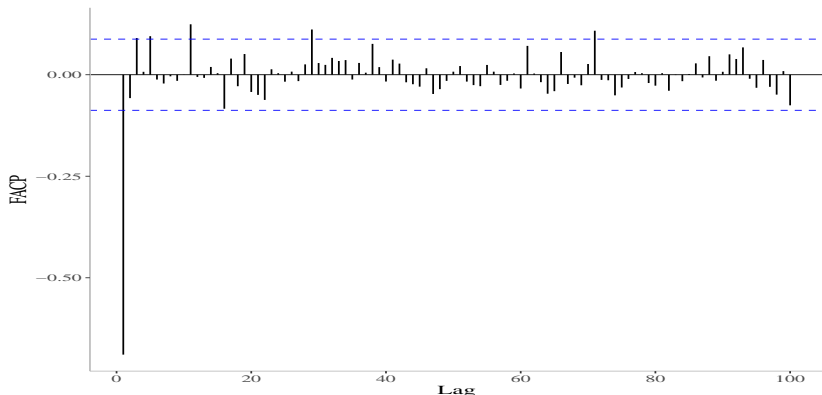


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = -0,7$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

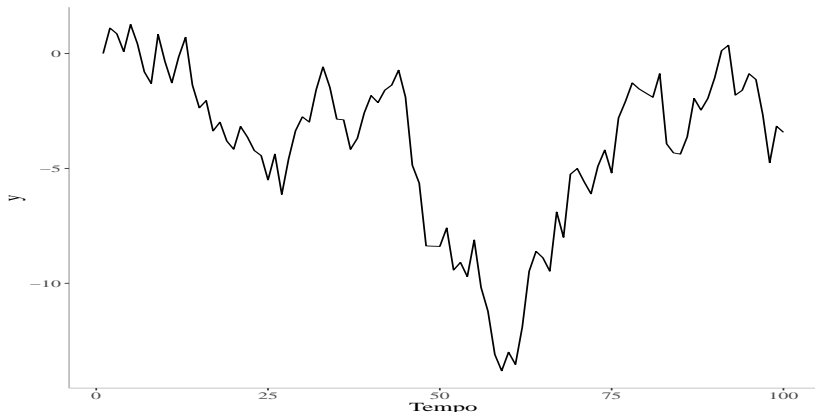


Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

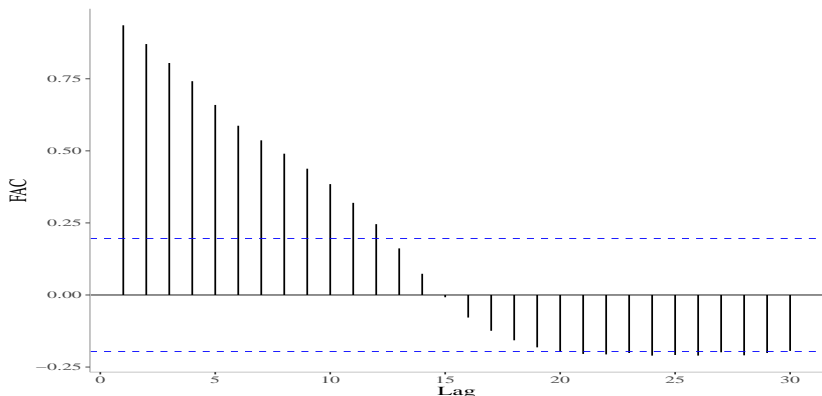


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos

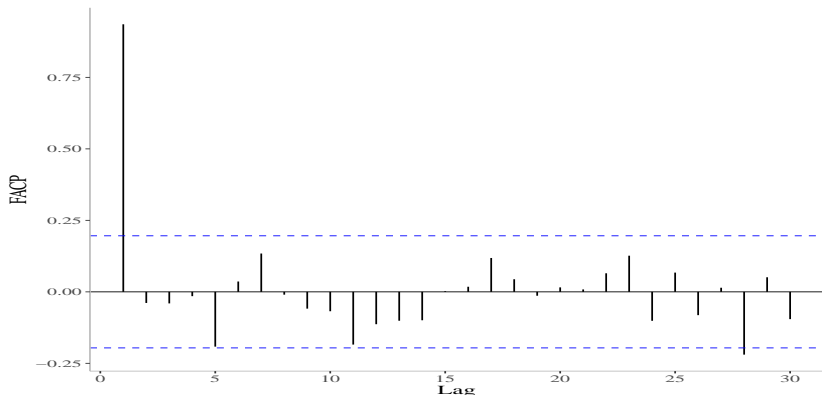


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 100$).

AR(1) - exemplos



Figura: Série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0,1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

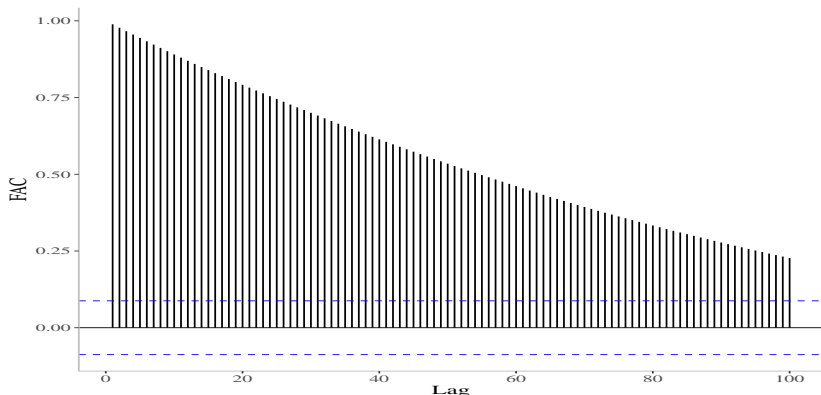


Figura: FAC para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - exemplos

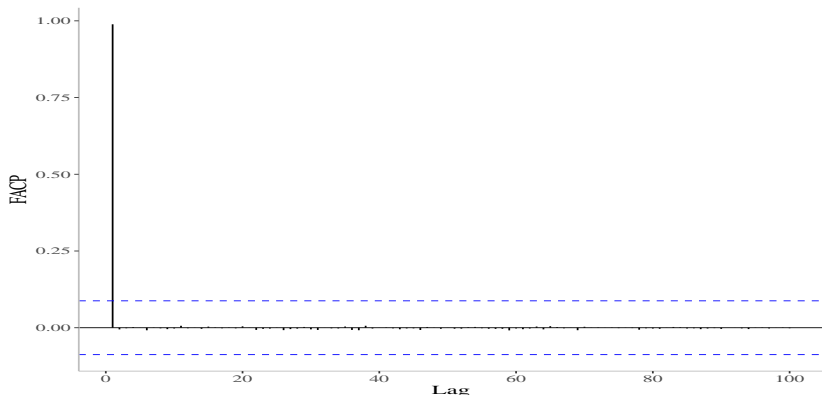


Figura: FACP para a série simulada de um processo AR(1) com $\phi = 1,01$ e considerando um ruído branco $N(0, 1)$ ($n = 500$).

AR(1) - outras propriedades

- Dizemos que o processo $\{Y_t\}$ é AR(1) com média μ , se o processo $\{Y_t - \mu\}$ for um processo AR(1).
- $\{Y_t\}$ é um processo AR(1) com *drift* se ele é tal que:

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

em que δ é uma constante e $|\phi| < 1$.

- A seguir, demonstraremos que o processo AR(1) com drift é estacionário.

AR(1) com drift

- Note que

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t - \phi Y_{t-1} = \delta + \epsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \phi(B)Y_t = \delta + \epsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t = \frac{1}{\phi(B)}\delta + \frac{1}{\phi(B)}\epsilon_t,$$

em que $\phi(B) = 1 - \phi B$.

AR(1) com drift

- Como δ é constante, por definição $B\delta = \delta$, logo (veja a página 6 destes slides),

$$Y_t = \delta \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}$$

$$Y_t = \frac{\delta}{1-\phi} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}.$$

- Portanto $E(Y_t) = \frac{\delta}{1-\phi}$, e como a função de autocovariância é invariante por adição de constantes ao processo (provar), então a FAC do AR(1) com drift é a mesma do AR(1).