

Processos de Autoregressivos de Médias Móveis (ARMA): Parte 2

Prof. Caio Azevedo

Seleção de modelos ARMA(p,q)

- Só faz sentido comparar modelos que tenham se ajustado de forma adequada (análise residual e preditiva).
- Particularmente, em relação à ordem do processo (p,q), podemos utilizar:
 - $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 - FAC e FACP: 1) quanto mais valores significativos, em geral, maior a memória do processo, 2) FAC e/ou FACP mais parecidas com aquelas de processoa AR(p) e MA(q) podem indicar, respectivamente, $p > q$ e $p < q$.
 - Critérios de seleção de modelos ([aqui](#)).

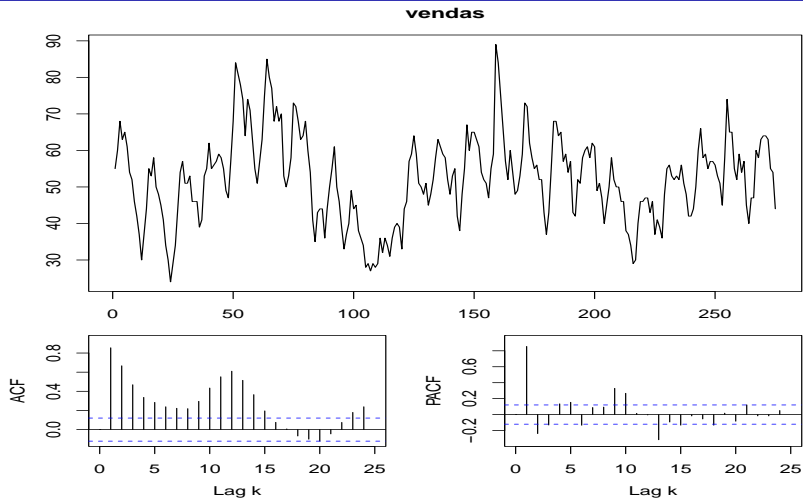
Seleção de modelos ARMA(p,q) (cont.)

- Particularmente, em relação à ordem do processo (p,q), podemos utilizar (cont.):
 - **Análise residual** (espera-se que os resíduos sejam ruídos brancos).
 - **Análise preditiva** (melhor previsão).
 - Pode-se considerar um modelo com ordem “elevada” e ir-se eliminando coeficientes não significativos.
 - Pode-se usar métodos de seleção automática como o **Stepwise**.
- Sempre deve-se checar os resíduos do modelo final (e dos modelos intermediários).
- Sempre deve-se checar se (ao menos) o modelo final indica estacionariedade, causalidade e invertibilidade (**quando for o caso**).

Exemplo: vendas mensais de casa

- Vendas mensais de “novas casas unifamiliares” (única família) nos EUA desde 1973.
- Temos um total de $n = 275$ observações.
- Disponível no R no pacote [fma](#).
- Veja também [aqui](#).

Gráficos exploratórios



Comentários

- O gráfico de ST sugere uma possível estacionariedade.
- As FAC e FACP indicam que um modelo $ARMA(p,q)$ pode ser adequado (decaimento exponencial, ainda que oscilatório, de ambas).
- No entanto, parece haver uma sazonalidade nos dados (que pode não ser acomodada por modelos $ARMA(p,q)$)
- Em princípio, não há impedimento de se tentar ajustar todas as 16 combinações possível (p,q) (dentro do intervalo sugerido - veja slide 2).
- Entretanto, vamos começar com um modelo $AR(2,2)$ (“meio termo”).

- Modelo ARMA(2,2):

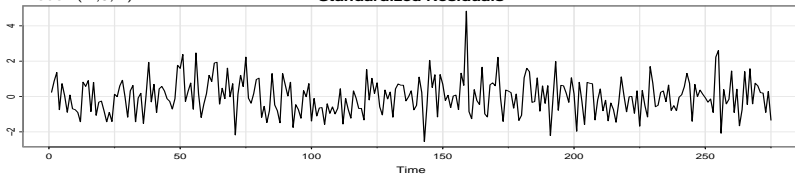
$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2).$$

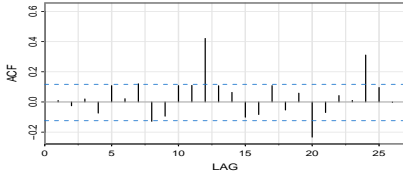
- Exercícios: escrever todos os outros modelos ajustados (destes slides).

Model: (2,0,2)

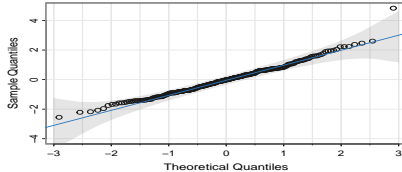
Standardized Residuals



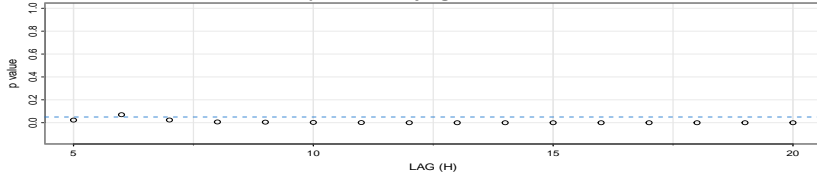
ACF of Residuals



Normal Q-Q Plot of Std Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Ajuste do modelo ARMA(2,2)

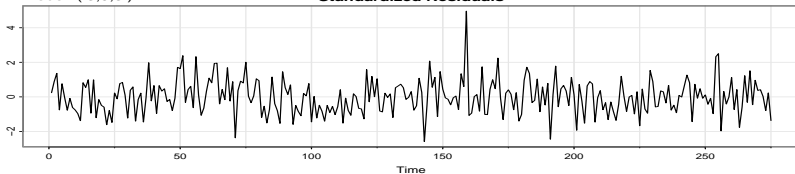
Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
ϕ_1	0,86	0,15	[0,56 ; 1,16]	5,68	< 0,0001
ϕ_2	-0,16	0,13	[-0,42 ; 0,11]	-1,18	0,2396
θ_1	0,18	0,14	[-0,10 ; 0,46]	1,25	0,2109
θ_2	0,34	0,07	[0,20 ; 0,48]	4,62	< 0,0001
μ	52,14	1,76	[48,68 ; 55,60]	29,54	< 0,0001

Comentários sobre o ajuste do ARMA(2,2)

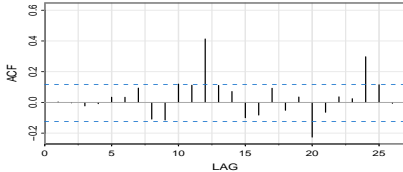
- O modelo não se ajustou bem aos dados (não normalidade dos erros, os erros não são ruído branco, correlações significativas nos erros). Assim, todas as análises serão feitas com ressalvas.
- Há uma certa contradição nos resultados pois, se por uma lado alguns parâmetros não são significativos, a análise residual indica que a memória do processo não está adequadamente especificada.
- Vamos ajustar um modelo ARMA(3,3).

Model: (3,0,3)

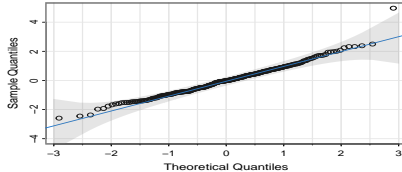
Standardized Residuals



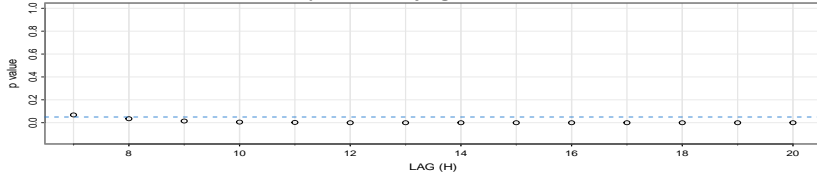
ACF of Residuals



Normal Q-Q Plot of Std Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Ajuste do modelo ARMA(3,3)

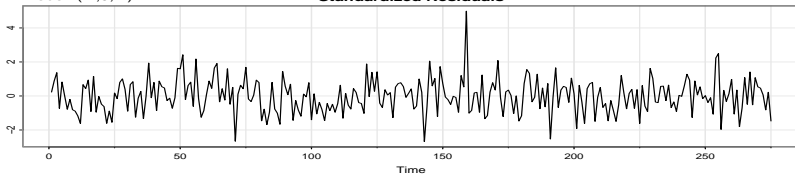
Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
ϕ_1	0,07	0,23	[-0,38 ; 0,52]	0,30	0,7607
ϕ_2	0,34	0,17	[0,01 ; 0,66]	2,05	0,0415
ϕ_3	0,03	0,14	[-0,25 ; 0,30]	0,19	0,8495
θ_1	0,99	0,22	[0,56 ; 1,42]	4,49	<0,0001
θ_2	0,64	0,16	[0,32 ; 0,96]	3,92	0,0001
θ_3	0,34	0,07	[0,21 ; 0,47]	5,09	<0,0001
μ	52,14	1,81	[48,59 ; 55,69]	28,77	<0,0001

Comentários sobre o ajuste do ARMA(3,3)

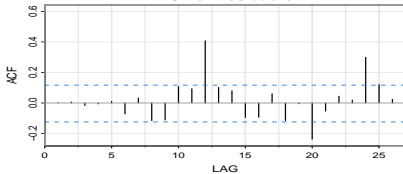
- O modelo não se ajustou bem aos dados (não normalidade dos erros, os erros não são ruído branco, correlações significativas nos erros). Assim, todas as análises serão feitas com ressalvas.
- Há uma certa contradição nos resultados pois, se por uma lado alguns parâmetros não são significativos, a análise residual indica que a memória do processo não está adequadamente especificada.
- Note ainda que os parâmetros MA são significativos, enquanto que os do AR, essencialmente, não o são. Esses resultados parecem não ser compatíveis com a FAC e FACP observadas.
- Vamos ajustar um modelo ARMA(4,4).

Model: (4,0,4)

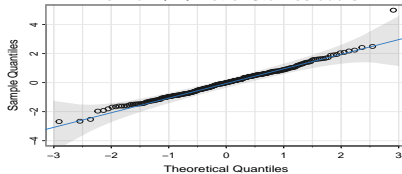
Standardized Residuals



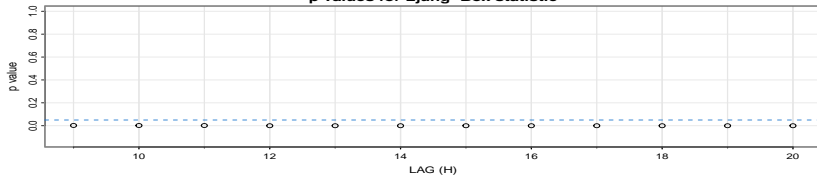
ACF of Residuals



Normal Q-Q Plot of Std Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Ajuste do modelo ARMA(4,4)

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
ϕ_1	1,08	0,21	[0,67 ; 1,48]	5,17	<0,0001
ϕ_2	0,05	0,34	[-0,61 ; 0,71]	0,15	0,8816
ϕ_3	-0,37	0,26	[-0,87 ; 0,13]	-1,44	0,1502
ϕ_4	0,19	0,13	[-0,06 ; 0,45]	1,48	0,1392
θ_1	-0,04	0,20	[-0,44 ; 0,36]	-0,21	0,8357
θ_1	-0,16	0,17	[-0,48 ; 0,17]	-0,94	0,3471
θ_1	-0,04	0,13	[-0,29 ; 0,21]	-0,33	0,7390
θ_1	-0,30	0,06	[-0,43 ; -0,18]	-4,71	<0,0001
μ	52,30	2,82	[46,77 ; 57,83]	18,53	<0,0001

Comentários sobre o ajuste do ARMA(4,4)

- O modelo não se ajustou bem aos dados (não normalidade dos erros, os erros não são ruído branco, correlações significativa nos erros). Assim, todas as análises serão feitas com ressalvas.
- Há uma certa contradição nos resultados pois, se por uma lado alguns parâmetros não são significativos, a análise residual indica que a memória do processo não está adequadamente especificada.

Comentários sobre o ajuste do ARMA(4,4)

- Note que, curiosamente, alguns parâmetros MA deixaram de ser significativos, enquanto que alguns parâmetros AR passaram a ser significativos (qualidade do ajuste).
- Não é o mais aconselhável, mas compararemos os critérios de informação dos 16 modelos (dentro do espectro proposto).

Critérios de Informação

Modelo	AIC	AICc	BIC
ARMA(1,1)	6,464	6,465	6,517
ARMA(1,2)	6,409	6,410	6,475
ARMA(1,3)	6,403	6,404	6,482
ARMA(1,4)	6,391	6,393	6,484
ARMA(2,1)	6,447	6,447	6,513
ARMA(2,2)	6,412	6,413	6,491
ARMA(2,3)	6,402	6,403	6,494
ARMA(2,4)	6,393	6,395	6,498
ARMA(3,1)	6,440	6,441	6,519
ARMA(3,2)	6,372	6,373	6,464
ARMA(3,3)	6,409	6,411	6,514
ARMA(3,4)	6,400	6,402	6,518
ARMA(4,1)	6,405	6,406	6,497
ARMA(4,2)	6,309	6,311	6,414
ARMA(4,3)	6,386	6,388	6,505
ARMA(4,4)	6,400	6,402	6,532

Comentários

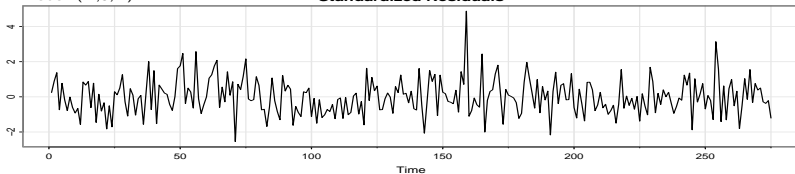
- Claramente o modelo escolhido é o ARMA(4,2).
- Entretanto, como os modelos não apresentaram bom ajuste (ajuste cada modelo e analise os respectivos gráficos de resíduos), os critérios de informação tem seus desempenhos comprometidos.
- Contudo, como estamos restritos às classes de modelos vistas no curso (até o momento), continuaremos com ele.

Comentários

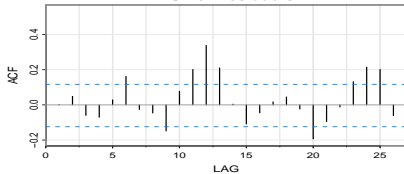
- Um outro ponto é que, para alguns modelos ajustados, houve problemas na obtenção das estimativas.
- Note, no próximo slide, que o modelo ARMA(4,2) não se ajustou bem aos dados. Entretanto, as previsões (ST observada e futura) parecem razoáveis (a menos dos intervalos de previsão).

Model: (4,0,2)

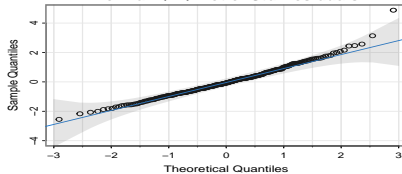
Standardized Residuals



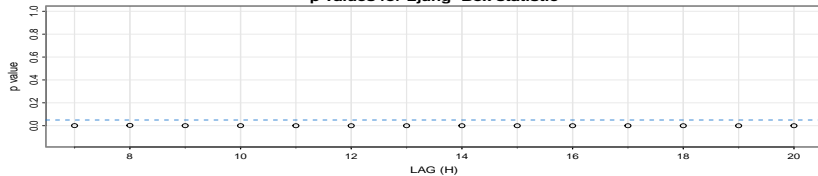
ACF of Residuals



Normal Q-Q Plot of Std Residuals



p values for Ljung-Box statistic



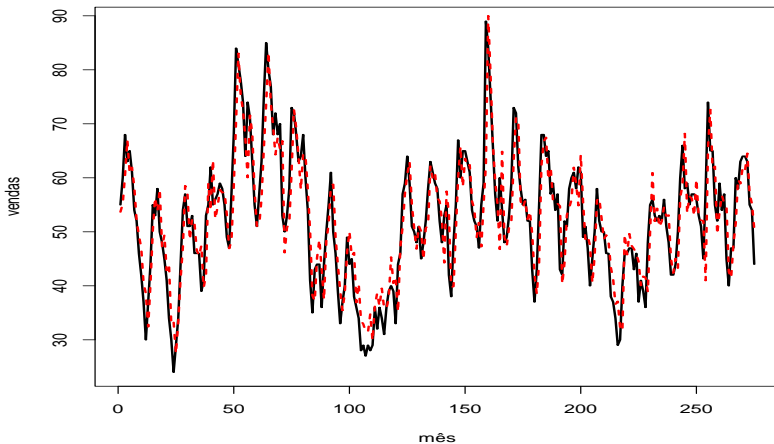
Resultados ARMA(4,2)

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
ϕ_1	-0,54	0,06	[-0,65 ; -0,43]	-9,56	<0,0001
ϕ_2	0,70	0,06	[0,59 ; 0,80]	12,52	<0,0001
ϕ_3	0,55	0,06	[0,44 ; 0,66]	9,87	<0,0001
ϕ_4	-0,37	0,06	[-0,48 ; -0,26]	-6,63	<0,0001
θ_1	1,72	0,03	[1,67 ; 1,78]	60,10	<0,0001
θ_2	1,00	0,04	[0,91 ; 1,08]	23,43	<0,0001
μ	52,10	1,81	[48,55 ; 55,65]	28,76	<0,0001

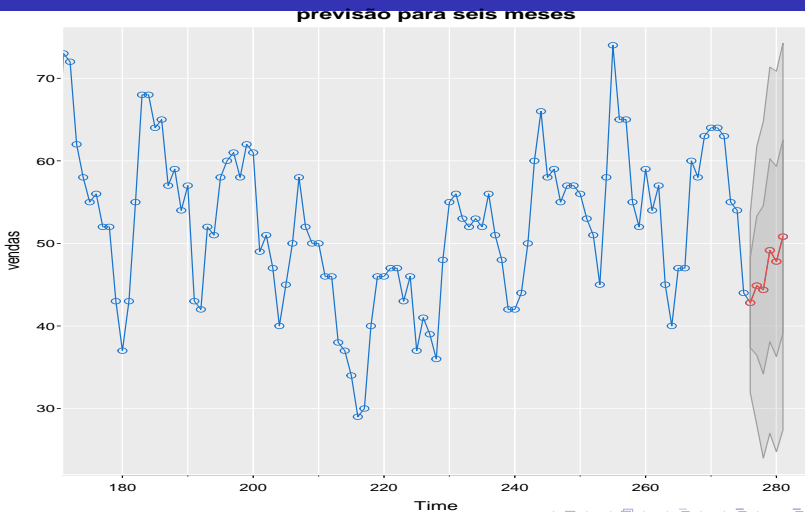
$\phi(z) : (1,00023; 1,0002; 1,6381; 1,6381)$ (estacionário mas, não-causal);

$\theta(z) : (0,4584; 2,1866)$ (não-invertível) (4 casas decimais)

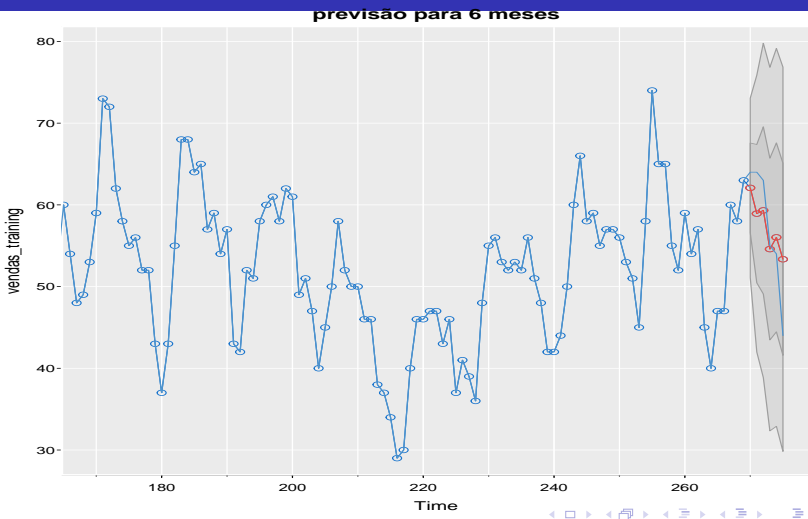
Previsão (dados observados)



Previsão: dados futuros não observados



Previsão: dados futuros observados



Comentários

- Se análise residual indicar que o ajuste está adequado (em todos os aspectos), podemos retirar eventuais parâmetros não significativos (reduzir o modelo) até termos um modelo de ordem menor, compatível com os dados.
- Se análise residual indicar que o ajuste está adequado com exceção da autocorrelação dos resíduos (há correlações significativas), podemos ajustar modelos de ordem maior, baseados na estrutura dessa correlação (também usando a FAC/FACP da ST).

Comentários

- Se o modelo não apresentar bom ajuste, na prática, devemos utilizar outro (mudar a distribuição da resposta, utilizar outra classe, e.g., ARIMA, usar uma estrutura não linear etc). Contudo, neste curso, com as devidas ressalvas, podemos utilizar a abordagem apresentada neste slides.
- A abordagem do item anterior se refere à comparar os modelos via critérios de Informação (CI).
- Também, além dos (CI) e da análise residual, os modelos podem ser comparados usando os critérios do Cap 6 do [livro](#).