Processos de Autoregressivos de Médias Móveis (ARMA): Parte 1

Prof. Caio Azevedo

Processos ARMA

- Dizemos que $\{Y_t\}$ é um processo ARMA(p,q) se for estacionário e se puder ser representado por:

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2),$$

em que $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ é o polinômio autoregressivo (AR), $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis (MA), e $\phi(B)$ e $\theta(B)$ não possuem fatores em comum.

- O processo $\{Y_t\}$ é dito ser ARMA(p,q) com média μ se $\{Y_t - \mu\}$ é ARMA(p,q).

Processos ARMA

- Os polinômios terão fatores comuns se tiverem raízes comuns. Isto, por sua vez, está relacionado com a fatoração desses polinômios. Por exemplo, o processo:

$$Y_t = 0,6Y_{t-1} - 0,08Y_{t-2} + 0,2\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$
$$\left(1 - 0,6B + 0,08B^2\right) Y_t = (1 - 0,2B)\,\epsilon_t$$

não é ARMA(2,1). Com efeito, note que as raízes do polinômio $\phi(z) = 1 - 0,6z + 0,08z^2$ são 2,5 e 5,0; logo (slide seguinte):

Processos ARMA

- Cont.

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{(1-0,2B)}{(1-0,6B+0,08B^2)}\epsilon_t = \frac{(1-0,2B)}{(1-B/2,5)(1-B/5,0)}\epsilon_t \\ &= \frac{(1-0,2B)}{(1-0,4B)(1-0,2B)}\epsilon_t = \frac{1}{(1-0,4B)}\epsilon_t, \end{aligned}$$

  Que corresponde a representação (em função de $\phi(B)$) de um modelo $AR(1)$ com $\phi = 0,4$.

- Portanto temos que $\{Y_t\}$ é, na verdade, um processo AR(1).
- Como usual procuraremos considerar processos (ARMA(p,q)) estacionários, causais e invertíveis (interpretação, estimação e previsão).

Processos ARMA

- Um processo ARMA(p,q) tem (uma única) solução estacionária se as raízes do polinômio autoregressivo associado estão fora do círculo unitário, i.e., se a solução de $\phi(\boldsymbol{z}) = 0$ ($\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_p)'$) é tal que $|z_i| \neq 1, i = 1, 2, ..., p$.
- **Exemplo**: considere o processo:

$$(1 - 0,4B)Y_t = (1 + 99B)\epsilon_t,$$

logo temos que a solução de $\phi(z) = 1 - 0,4z = 0$ é $z = 2,5$. Logo, como $|z| \neq 1$ então $\{Y_t\}$ é estacionário.

Processos ARMA

- Um processo ARMA(p,q) é causal (e, consequentemente estacionário) se a solução de $\phi(\boldsymbol{z}) = 0$ ($\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_p)'$) é tal que $|z_i| > 1, i = 1, 2, ..., p$, e assim, podemos obter sua representação MA(∞) através de:

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}.$$

- Para ser somente estacionário, basta que $|z_i| \neq 1, i = 1, 2, ..., p$

Processos ARMA

- Um processo ARMA(p,q) é invertível se a solução de $\theta(\boldsymbol{z}) = 0$ é tal que $|z_i| > 1, i = 1, 2, ..., q$, e portanto podemos obter sua representação AR(∞) considerando:

$$\epsilon_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j}.$$

Observação sobre a invertibilidade do ARMA

- Em certas situações no processo ARMA conseguimos achar processos similares mais fáceis de interpretar.
- Considere um exemplo simples, ou seja, um processo MA(1) com $Y_t = (1 - 0,4B)\epsilon_t$. Resolvendo $\theta(z) = 1 - 0,4z = 0$ temos que $|z| = 2,5 > 1$ e portanto $\{Y_t\}$ é invertível e

$$\epsilon_t = \frac{1}{1 - 0,4B} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (0,4)^j B^j Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (0,4)^j Y_{t-j},$$

porém, note que a partir de $j = 4$ temos coeficientes muito pequenos (menores que 0,0256) associados aos valores de Y_{t-j}.

Observação sobre a invertibilidade do ARMA

- Logo, podemos aproximar a soma por:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &\approx \sum_{j=0}^{4} (0,4)^j Y_{t-j} \Longrightarrow \\ Y_t &\approx -0,4Y_{t-1} - 0,16Y_{t-2} - 0,064Y_{t-3} - 0,0256Y_{t-4} + \epsilon_t. \end{aligned}$$

- Ou seja, podemos aproximar esse processo MA(1) por um AR(4).
- Por um lado estamos aumentando o espaço paramétrico envolvido no processo pois, em um caso geral, o MA(1) tem 1 parâmetro e o AR(4) tem 4 parâmetros. Contudo, por outro lado o modelo AR(4) é mais fácil de interpretar para um pesquisador do que o modelo MA(1).

FAC e FACP

- Para um processo ARMA(p,q) podemos obeter a respectiva FAC [$\gamma(k)$] de maneira similar ao que fora feito para os processos AR(p) (aqui) e MA(q) (aqui), ou seja:
  1. Podemos multiplicar a equação do processo por Y_{t-k} e depois calcular a esperanças, resolvendo as equações envolvidas.
  2. Ou podemos partir do fato de que o processo pode ser escrito como um MA(∞) e assim utilizar propriedades já estabelecidas anteriormente.
- Exercício: encontre a FAC para um processo ARMA(1,1).

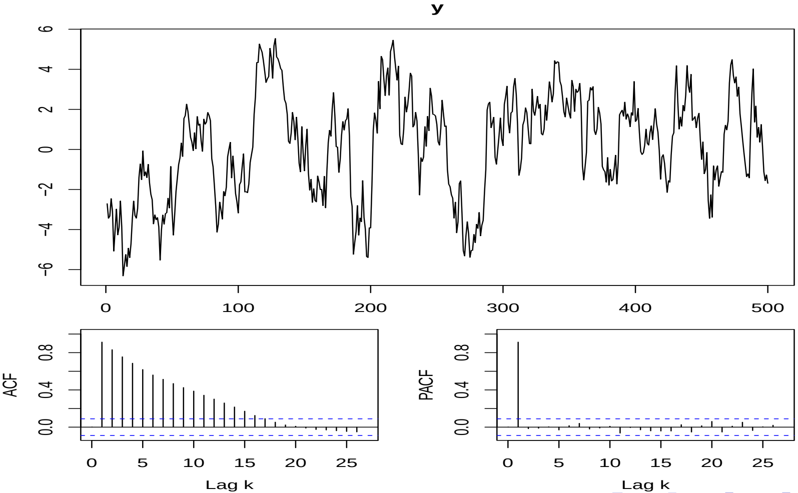
Comportamento da FAC e FACP

- Na práticas a FAC e FACP nos auxiliam a identificar se um processo (mais) adequado para a modelagem daquela série pode ser um AR(p), MA(q) ou um ARMA(p,q).

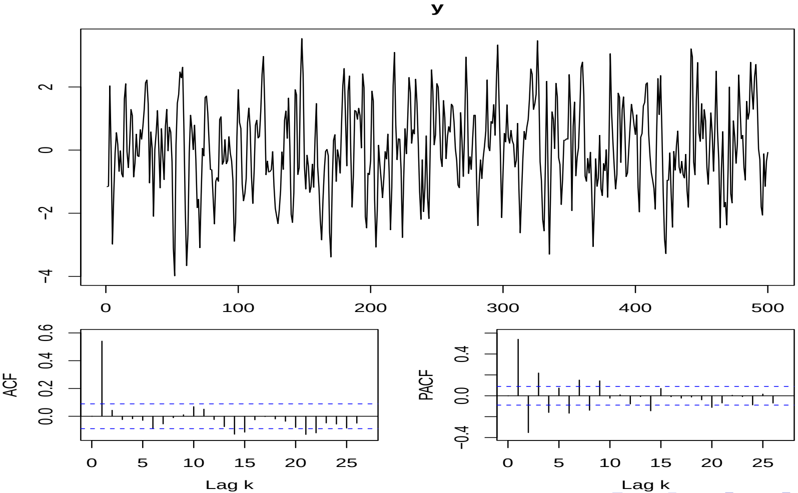
	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
FAC	decai exponencialmente	é zero de $q+1$ em diante	decai exponencialmente
FACP	é zero de $p+1$ em diante	decai exponencialmente	decai exponencialmente

- Análises de diagnóstico sempre são necessárias.
- Observando as séries a seguir, quais modelos parecem ser adequados?
- Os gráficos a seguir foram feitos usando a função "PlotACF" do pacote "DescTools".

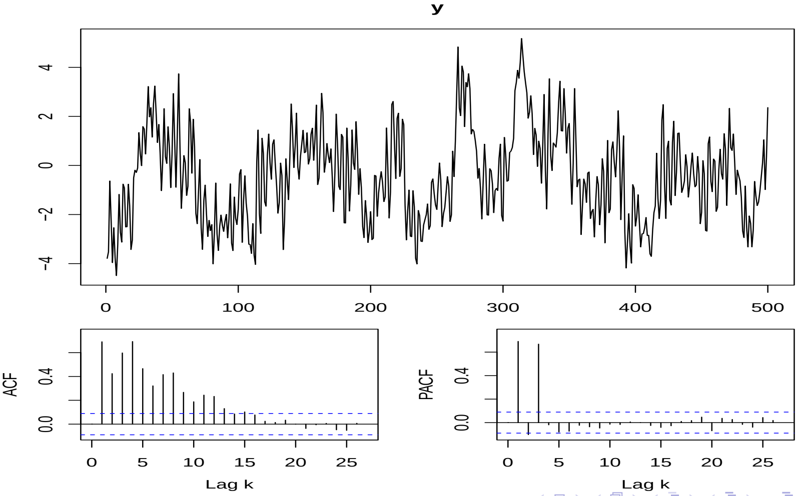
Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP



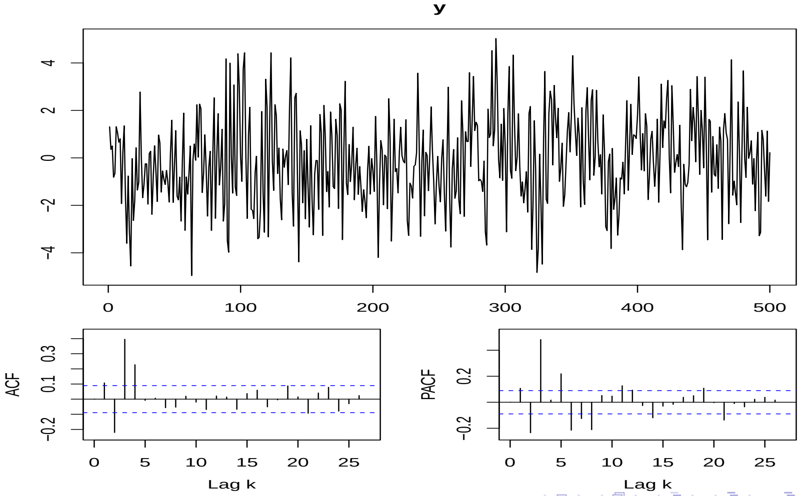
Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP



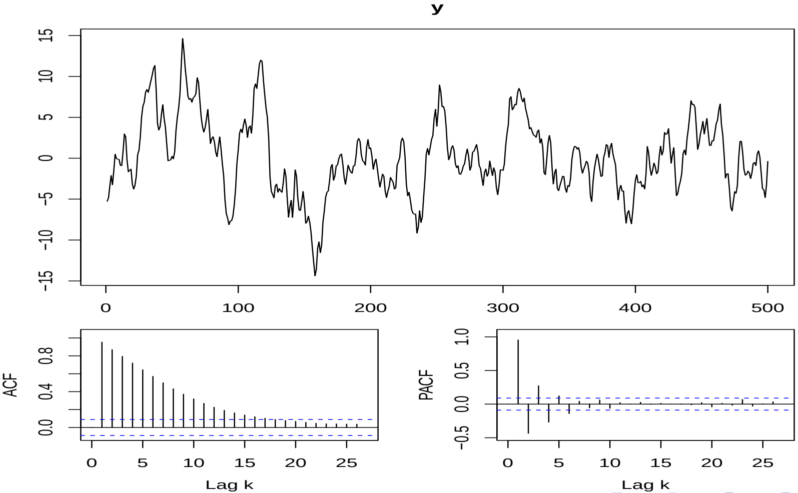
Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP



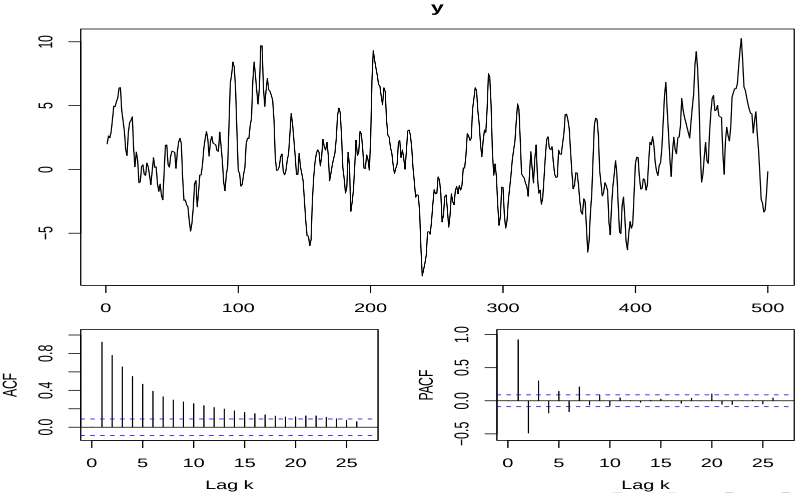
Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP



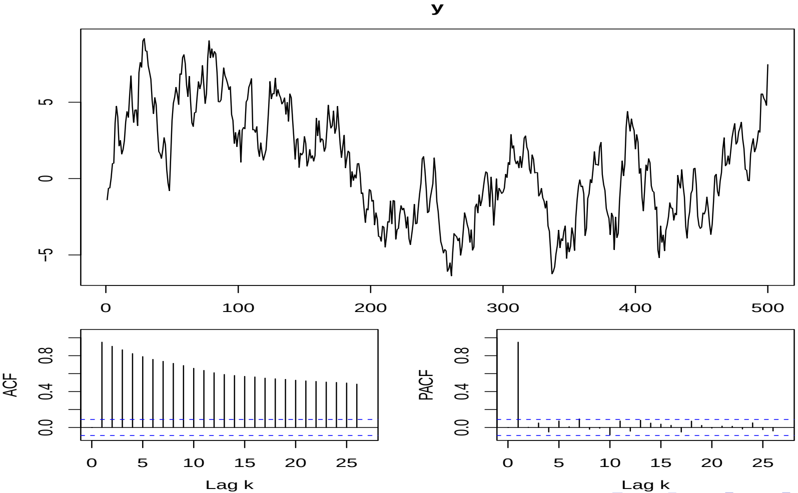
Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP



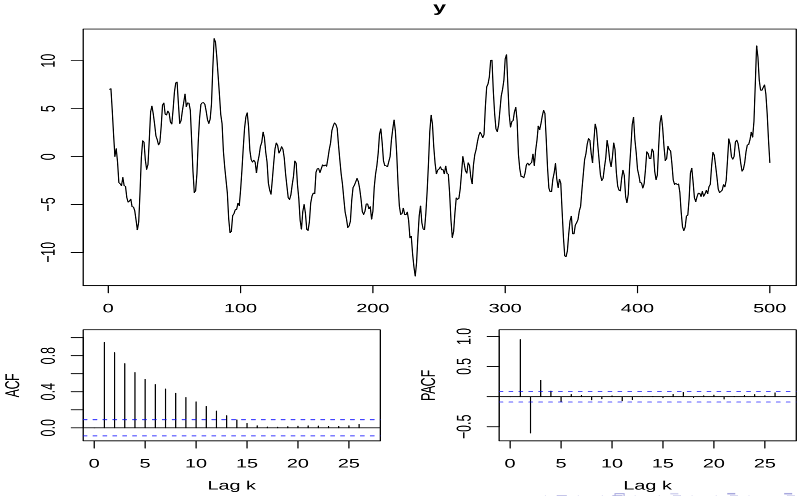
Comport. do gráfico de ST/FAC/FACP - ARMA(1,1)



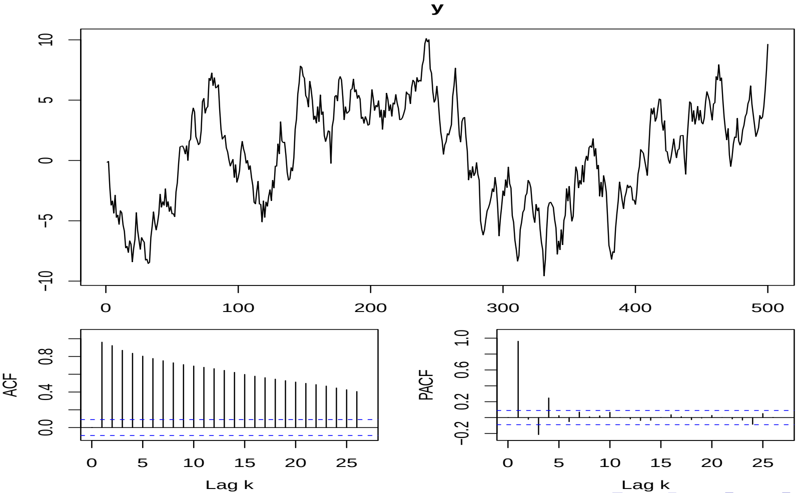
Comport. do gráfico de ST/FAC/FACP - ARMA(2,1)



Comport. do gráfico de ST/FAC/FACP - ARMA(1,2)



Comport. do gráfico de ST/FAC/FACP - ARMA(2,2)



Estimação

- Essencialmente, os desenvolvimentos apresentados para os modelos AR(p) e MA(q) são considerados.
- Usualmente, gera-se estimativas iniciais via método dos momentos e mínimos quadrados condicionais (considerando $\mathcal{E}(Y_t) = \mu$ conhecido). De posse delas, estima-se os parâmetros (através de métodos iterativos) por máxima verossimilhança.

Estimação

- A verossimilhança para modelos ARMA(p,q) pode ser obtida através da utilização combinada das abordagens utilizadas para os modelos AR(p) e MA(q). Veja também aqui.
- Para a construção de processos inferenciais (erros-padrão, intervalos de confiança e testes de hipótese) usa-se teoria assintótica ou métodos de reamostragem.

Previsão

- Essencialmente, podemos utilizar a abordagem apresentada para os modelos MA(q) (veja).
- A parte AR do modelo, na previsão, é substituída pelos valores observados (ou pela previsão obtida para o instante em questão, que dependerá do valor observado no instante (t)).
- Veja aqui, aqui, aqui e aqui.

Modelagem ARMA

- Na construção do Modelo ARMA os passos (usuais) são os seguintes: Análise Exploratória, Identificação, Estimação (ajuste), Diagnóstico e Seleção de Modelo(s).

  1. Análise Exploratória: Gráfico de Séries Temporais, FAC, FACP e Suavização.
  2. Identificação: Através da FAC e FACP, **conjecturar de forma preliminar os valores de p e q**. Na literatura, escolhas usuais são $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Modelagem ARMA

3. Método de máxima verossimilhança (pelo menos neste curso, não necessariamente é o mais apropriado). Avaliar a significância dos parâmetros. Checar causalidade e invertibilidade. Verificar a existência de raízes comuns. Avaliar se há *overfitting* (quando o modelo, essencialmente, replica os dados observados, mas não apresentam boas predições para instantes futuros) .

4. Diagnóstico: essencialmente, considera-se Análise de Resíduos. Análises gráficas e testes de hipótese. Verificar se os resíduos são ruído branco: homocedasticidade, normalidade, valores atípicos, não correlacionados.

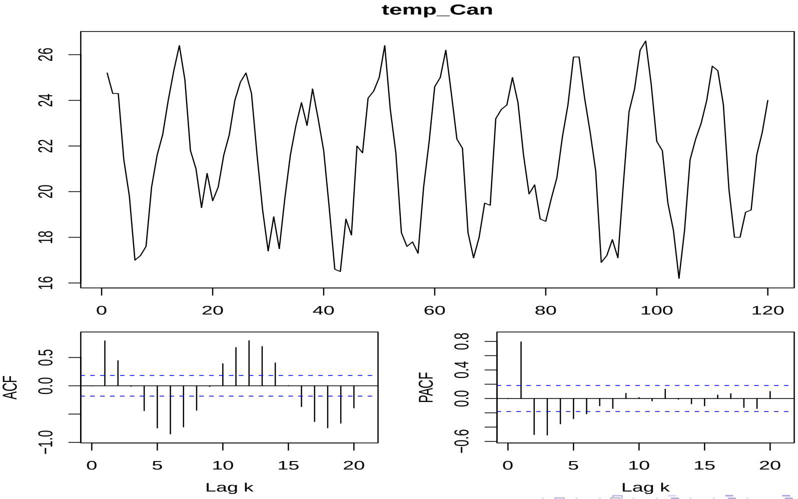
Modelagem ARMA

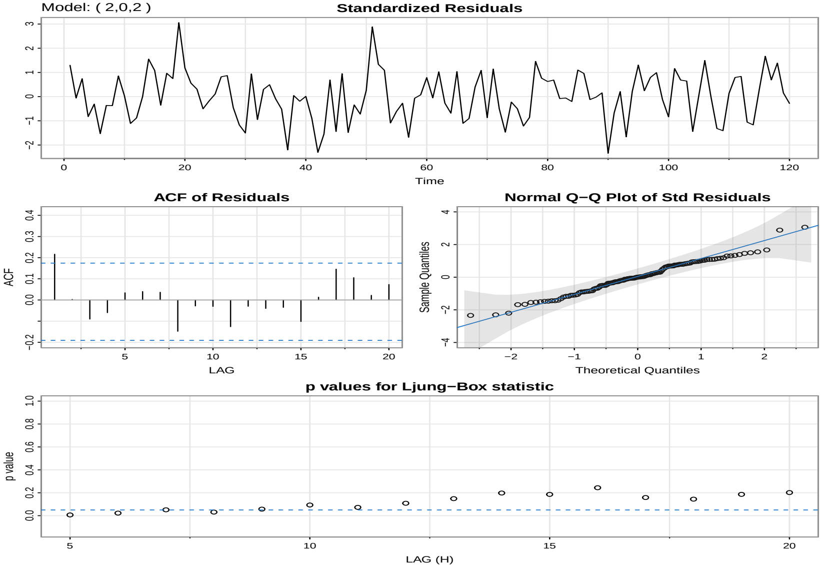
5. Seleção de modelos. Dentre aqueles que ajustaram bem, usar os critérios de informação usuais (eventualmente outros mais apropriados). Veja aqui slides 20 e 21. Lembrando que se escolhe o modelo com o menor, para esses critérios. Observação: a literatura aponta que o critério de Akaike tende a escolher o modelo de maior ordem (p,q).

Aplicação: Temperaturas mensais (^oC) da cidade de Cananéia/SP: 1976 a 1985

- Temos um total de 120 observações.
- Aparentemente uma ST estacionária com sazonalidade.
- Algumas comentários e análises podem ser encontradas aqui, aqui e aqui.
- Um modelo ARMA(2,2) pode ser apropriado (dentre as escolhas possíveis até o momento mas não, necessariamente, o mais apropriado, dentre todos os modelos).

Comportamento do gráfico de ST, FAC e FACP

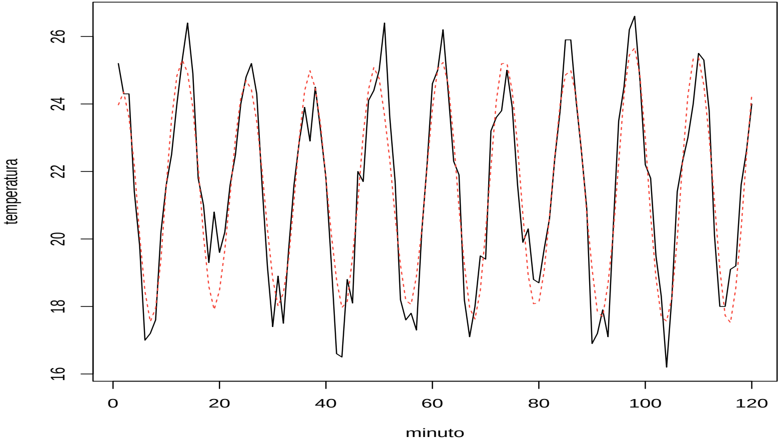



Model: (2,0,2)
Standardized Residuals
Time
ACF of Residuals
ACF
LAG
Normal Q−Q Plot of Std Residuals
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
p values for Ljung−Box statistic
p value
LAG (H)

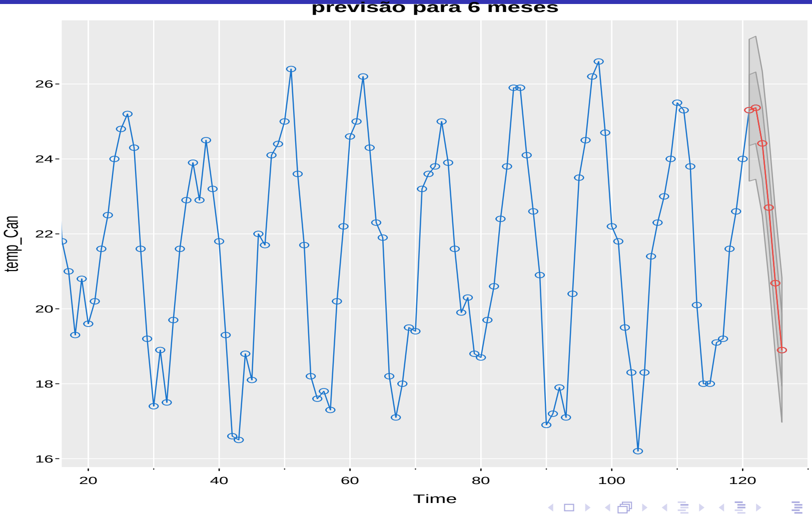
Ajuste

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
ϕ_1	1,73	$<$0,01	[1,73 ; 1,74]	643,09	$<$0,0001
ϕ_2	-1,00	$<$0,01	[$<$-1,00 ; $>$-1,01]	-665,14	$<$0,0001
θ_1	-1,61	0,07	[-1,76 ; -1,46]	-21,65	$<$0,0001
θ_2	0,90	0,07	[0,76 ; 1,04]	12,53	$<$0,0001
μ	21,55	0,09	[21,36 ; 21,73]	230,48	$<$0,0001
σ^2	0,90	-	-	-	-

Previsão - ST observada



Previsão - ST futura



Comparação de modelos

Modelo	AIC	AICc	BIC
ARMA(1,1)	3,799	3,800	3,892
ARMA(2,1)	3,122	3,125	3,238
ARMA(1,2)	3,694	3,697	3,810
ARMA(2,2)	2,890	2,894	3,029

OBS: Modelos de ordem maior mostraram-se não estacionários

Comentários

- Em termos de análise residual, o modelo não se ajustou muito bem. Provavelmente isso deve a pelo menos um dos três seguintes pontos:
  - Variabilidade não captada.
  - Autocorrelação não captada.
  - Não normalidade (assimetria e/ou caudas pesadas) dos resíduos.
- Em termos preditivos o modelo também não se ajustou bem (embora acompanhe a ST observada, os valores preditos e observados estão distantes).
- Um ponto positivo é que a previsão para valores futuros parece ir na direção esperada.

Comentários

- Não foi possível prever para valores futuros, retirando-se observações finais. Provavelmente isso deve a sazonalidade da ST que não fora capturada apropriadamente pelo modelo.
- Modelo estacionário e causal ($\phi(z)$, $z_1 = 1,0005$ e $z_2 = 1,0005$) mas não invertível ($\theta(z)$, $z_1 = 0,4884$ e $z_2 = 2,2847$).
- Temos que ajustar outro modelo. Um ponto de partida consiste em utilizar modelos da classe SARIMA (os quais vermos adiante no curso).