

Teorema de Bayes

Exemplo

30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; $3/10$ das mulheres são fumantes, enquanto $11/70$ dos homens são fumantes. Calcule:

- (a) A probabilidade de um indivíduo sorteado ser mulher e fumante;
- (b) A probabilidade de um indivíduo sorteado ser homem e fumante;
- (c) A probabilidade de um homem ser fumante;
- (d) A probabilidade de um homem ser não fumante;
- (e) A probabilidade de um fumante ser homem.

Fonte: Prof. Mario Gneri, Notas de Aula.



Teorema de Bayes

- (a) Conhecemos $P(\text{mulher}) = 0,3$, e além disso, $P(\text{fumante}|\text{mulher}) = 0,15$. Então a probabilidade do evento “mulher e fumante”, dado por $\{\text{mulher} \cap \text{fumante}\}$, é dada por

$$\begin{aligned} P(\text{mulher} \cap \text{fumante}) &= P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher}) \\ &= 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \end{aligned}$$

- (b) De maneira similar, temos que

$$\begin{aligned} P(\text{homem} \cap \text{fumante}) &= P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem}) \\ &= 0,7 \cdot 11/70 = 0,11 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- (c) Aqui, estamos analisando uma restrição da população, isto é, “dentre os homens, quais são fumantes”? O evento em questão é $\{\text{fumante}|\text{homem}\}$ e a probabilidade é dada pelo enunciado,

$$P(\text{fumante}|\text{homem}) = 11/70$$

- (d) Temos que

$$P(\text{fumante}^c|\text{homem}) = 1 - P(\text{fumante}|\text{homem}) = 59/70$$

pois a probabilidade condicional preserva a propriedade de complemento da probabilidade, isto é, $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.

Teorema de Bayes

- (e) Para encontrar esta probabilidade, devemos utilizar o Teorema de Bayes, isto é,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

No contexto do problema, queremos $P(\text{homem}|\text{fumante})$, que é dado por

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})}{P(\text{fumante})}$$

Teorema de Bayes

- (e) Note contudo que não sabemos $P(\text{fumante})$. Devemos considerar a lei da probabilidade total,

$$P(\text{fumante}) = P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher}) \\ + P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})$$

Podemos então ver que

$$P(\text{fumante}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{11}{70} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{5}$$

Com isso, concluímos que

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{11/70 \cdot 7/10}{1/5} = \frac{11}{20}$$

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

Três pessoas serão selecionadas aleatoriamente de um grupo de dez estagiários administrativos. Esses três formarão um comitê com três cargos diferentes: o primeiro será nomeado coordenador, o segundo fiscal e o terceiro secretário.

Metade do grupo são estudantes de último ano de graduação, sem nenhuma experiência dentro da empresa. Os outros cinco são estagiários há um semestre, e já concorrem por uma vaga efetiva na empresa.

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

- (1) Qual é a probabilidade de um dos veteranos ser o coordenador do comitê?
- (2) Mostre que o evento $A = \{\text{O coordenador é um estagiário antigo}\}$ não é independente do número de estagiários novos no comitê.
- (3) Se o comitê tem dois estagiários novos, qual é a probabilidade que o coordenador seja o estagiário antigo?
- (4) Se o comitê tem pelo menos dois estagiários novos, qual é a probabilidade de que o coordenador seja um estagiário novo?

Independência e Probabilidade Condicional

O espaço de configurações possíveis para a formação do comitê é:

$$H = \{nnn, nna, nan, ann, naa, ana, aan, aaa\}$$

Onde a ordem representa os cargos (coordenador, fiscal, secretário) e a indica um estagiário antigo, enquanto n um estagiário novo.

Defina o evento $A = \{\text{O coordenador é um estagiário antigo}\}$, de modo que $A^c = \{\text{O coordenador é um estagiário novo}\}$. Defina também os eventos B_0 , B_1 , B_2 e B_3 , associados ao número de estagiários novos no comitê.

$$B_k = \{k \text{ estagiários novos no comitê}\}$$

Independência e Probabilidade Condicional

Para cada configuração, temos uma probabilidade associada:

| Evento | Probabilidade |
|--------|-----------------------------------|
| nnn | $5/10 \cdot 4/9 \cdot 3/8 = 3/36$ |
| nna | $5/10 \cdot 4/9 \cdot 5/8 = 5/36$ |
| nan | $5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$ |
| ann | $5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$ |
| naa | $5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$ |
| ana | $5/10 \cdot 5/9 \cdot 4/8 = 5/36$ |
| aan | $5/10 \cdot 4/9 \cdot 5/8 = 5/36$ |
| aaa | $5/10 \cdot 4/9 \cdot 3/8 = 3/36$ |

Independência e Probabilidade Condicional

Observando os pontos amostrais na tabela anterior (nnn, nna, etc.), construímos uma tabela de distribuição de B , pois

$$B_0 = \{aaa\}$$

$$B_1 = \{naa, ana, aan\}$$

$$B_2 = \{nna, nan, ann\}$$

$$B_3 = \{nnn\}$$

| | $P(B_0)$ | $P(B_1)$ | $P(B_2)$ | $P(B_3)$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| Total | 3/36 | 15/36 | 15/36 | 3/36 |

Independência e Probabilidade Condicional

- (1) Temos que essa probabilidade pode ser extraída da primeira tabela. Ela corresponde aos eventos ann , aan , ana e aaa . Como os eventos são disjuntos, a probabilidade de $A = \{\text{O coordenador é um estagiário antigo}\}$ é dada por

$$P(A) = P(\{ann\}) + P(\{aan\}) + P(\{ana\}) + P(\{aaa\})$$

$$P(A) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{2}$$

Independência e Probabilidade Condicional

- (2) Embora seja intuitivo dizer que os eventos são dependentes (afinal, quanto mais estagiários antigos no comitê, maiores são as chances do coordenador ser um deles), devemos mostrar que a distribuição conjunta dos eventos não verifica a definição de independência, a saber,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são independentes}$$

Considere novamente a tabela. Temos que o evento $A \cap B_3 = \emptyset$, pois não há estagiários antigos em B_3 .

$A \cap B_2 = \{ann\}$, $A \cap B_1 = \{ana, aan\}$ e $A \cap B_0 = \{aaa\}$.

Independência e Probabilidade Condicional

(2) (cont.) Temos que

$$P(A \cap B_0) = P(\{aaa\}) = 3/36 \neq 1/2 \cdot 3/36 = P(A)P(B_0)$$

$$P(A \cap B_1) = P(\{ana, aan\}) = 10/36 \neq 1/2 \cdot 15/36 = P(A)P(B_1)$$

$$P(A \cap B_2) = P(\{ann\}) = 5/36 \neq 1/2 \cdot 15/36 = P(A)P(B_2)$$

$$P(A \cap B_3) = P(\emptyset) = 0 \neq 1/2 \cdot 3/36 = P(A)P(B_3)$$

Ou seja, os eventos A e B_k , $k = 1, 2, 3, 4$ são dependentes.

Independência e Probabilidade Condicional

- (3) Queremos calcular $P(A|B_2)$. Pela definição de probabilidade condicional,

$$P(A|B_2) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(B_2)} = \frac{5/36}{15/36} = \frac{5}{15}$$

- (4) Queremos agora $P(A|\{B_2 \cup B_3\})$. Temos que

$$P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = \frac{P(A \cap \{B_2 \cup B_3\})}{P(B_2 \cup B_3)} = \frac{P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)}{P(B_2) + P(B_3)}$$

pois $B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Basta conferir as distribuições conjuntas em (2) para determinar que $P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = 5/18$.

Teorema de Bayes

Exemplo

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados “defeituosos” e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica.

No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

Teorema de Bayes

Exemplo

- (1) Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?
- (2) Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Teorema de Bayes

- (1) Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = 0,3$, $P(F_2) = 0,45$ e $P(F_3) = 0,25$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = 0,01$, $P(A|F_2) = 0,02$ e $P(A|F_3) = 0,015$. Então, pela lei da probabilidade total,

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\ &= 0,3 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,015 = 0,01575\end{aligned}$$

- (2) Aqui, aplicaremos o Teorema de Bayes usando o item anterior para encontrar $P(A)$:

$$P(F_2|A) = \frac{P(A|F_2)P(F_2)}{P(A)} = \frac{0,02 \cdot 0,45}{0,01575} = 0,5714$$

Probabilidade Condicional

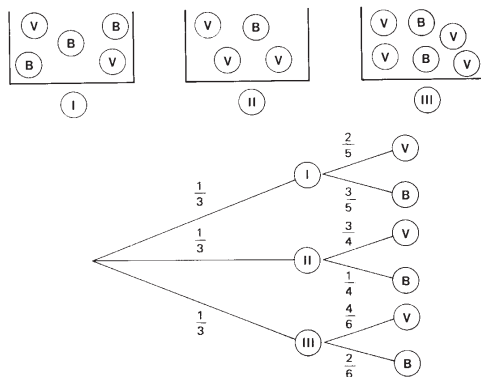
Exemplo

Uma urna I tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 brancas (B); outra urna II tem 3 bolas vermelhas e uma branca, e a urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade da bola ser vermelha?

Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 103-E.

Probabilidade Condicional

Considere o diagrama:



Probabilidade Condicional

Note que os eventos U_I (sortear urna I), U_{II} e U_{III} são uma partição de Ω , isto é, $\Omega = U_I \cup U_{II} \cup U_{III}$. Então o evento $V =$ sair bola vermelha tem probabilidade dada por

$$P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V)$$

Mas pelo diagrama, notamos que $P(U_I \cap V) = 1/3 \cdot 2/5 = 2/15$, $P(U_{II} \cap V) = 1/3 \cdot 3/4 = 1/4$ e $P(U_{III} \cap V) = 1/3 \cdot 4/6 = 2/9$. Então temos que

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}$$

Teorema de Bayes

Exemplo

Considere uma urna com bolas pretas e vermelhas, de onde sorteamos aleatoriamente bolas, sem reposição.

- (a) Suponha que temos apenas uma bola preta e uma vermelha. Se na segunda extração tiramos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?
- (b) Suponha que temos três bolas pretas e duas vermelhas. Se na segunda extração tiramos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?

Teorema de Bayes

O objetivo do item (a) é justificar que nem sempre trabalhamos com probabilidades condicionadas em algum instante anterior do tempo. Seja X_1 a primeira extração e X_2 a segunda extração.

- (a) Sem condicionalmente, a probabilidade de $X_1 = V$ seria igual a probabilidade de $X_1 = P$, ou seja, $1/2$. Mas sabemos que ocorreu $X_2 = V$, então a primeira bola a ter sido retirada foi necessariamente preta. Temos, então, que, embora X_2 tenha ocorrido no futuro, já sabemos a informação sobre esse evento e portanto devemos atualizar a probabilidade de interesse.

Teorema de Bayes

(a) (cont.) Formalmente, considere $P(X_1 = P|X_2 = V)$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)}$$

mas $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$, pois só temos duas bolas na urna. Sabemos que $P(X_1 = P) = 1/2$.

Teorema de Bayes

- (a) (cont.) Já $P(X_2 = V)$ deve ser determinado pela lei de probabilidades totais, ou seja

$$P(X_2 = V) = P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) + P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V)$$

mas novamente $P(X_2 = V|X_1 = V) = 0$ pois não há reposição e $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{1 \cdot 1/2}{0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2} = 1$$

Teorema de Bayes

- (b) Novamente queremos $P(X_1 = P|X_2 = V)$. Condição no futuro,

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)}$$

Sabemos que $P(X_1 = V) = 2/5$ e $P(X_1 = P) = 3/5$. Além disso, $P(X_2 = V|X_1 = V) = 1/4$, e $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1/2$.

Teorema de Bayes

- (b) Agora, para determinar $P(X_2 = V)$, devemos usar o teorema da probabilidade total.

$$\begin{aligned}P(X_2 = V) &= P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) \\ &\quad + P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V) \\ &= 1/2 \cdot 3/5 + 1/4 \cdot 2/5 = 2/5\end{aligned}$$

Então a probabilidade da primeira extração ser preta, dado que a segunda foi vermelha, é simplesmente

$$\begin{aligned}P(X_1 = P|X_2 = V) &= \frac{P(X_2=V|X_1=P)P(X_1=P)}{2/5} \\ &= \frac{1/2 \cdot 3/5}{2/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5} = P(X_1 = P)\end{aligned}$$