

Técnicas de Contagem

Podemos fazer permutações e combinações.

- *Permutações* são os arranjos de elementos em que se tem em conta a ordem com que são tomados. Com a permutação sabemos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n , de uma população com tamanho N .

$${}_N P_n = \frac{N!}{(N - n)!}$$

Técnicas de Contagem

- *Combinações* são arranjos que não consideram a ordem dos elementos. Se queremos ter amostras sem repetição, temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$ também pode ser denotado por $C(n, r)$ ou C_r^n .

Técnicas de Contagem

- Podemos fazer combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso, $C_r(n, k) = C(n + k - 1, k)$ (“r” denota repetição).
- As bolinhas (k) representam a quantidade de elementos da amostra, enquanto que as barrinhas (n-1) estão relacionadas com a quantidade de elementos da população.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \leftrightarrow \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet | \dots |$$

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Suponha que temos uma população com $N = 6$ elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar as seguintes maneiras de sorteio:

- 1 Com ordem e repetição
- 2 Com ordem e sem repetição
- 3 Sem ordem e com repetição
- 4 Sem ordem e sem repetição
- 5 Só repetição

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 1: Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 * 6 = 36$ possibilidades.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 2: Se queremos a amostra com ordem e sem repetições, temos ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$ possibilidades.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2,1) | | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| (3,1) | (3,2) | | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | | (4,5) | (4,6) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | | (5,6) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | |

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 3: Se queremos a amostra sem ordem, mas com repetições, temos $C_r(6, 2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ possibilidades.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| | | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| | | | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| | | | | (5,5) | (5,6) |
| | | | | | (6,6) |

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 4: Se queremos a amostra sem ordem e sem repetições, temos $C(6, 2) = \binom{6}{2} = 15$ possibilidades.

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| | | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| | | | (4,5) | (4,6) |
| | | | | (5,6) |

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 5: Se só queremos repetições, temos somente 6 possibilidades.

(1,1)
(2,2)
(3,3)
(4,4)
(5,5)
(6,6)

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: freguês é homem **A**: prefere salada
M: freguês é mulher **B**: prefere carne

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Devemos “traduzir” os dados do enunciado em eventos:

- (i) “20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada” diz que o evento $A|H$ tem probabilidade $P(A|H) = 0,20$. Observe que então $P(A^c|H) = P(B|H) = 0,80 = 1 - P(A|H)$, ou seja, 80% dos homens preferem carne.
- (ii) De modo análogo, “30% das mulheres escolhem carne” diz que o evento $B|M$ tem probabilidade $P(B|M) = 0,30$.
- (iii) “75% dos fregueses são homens” nos diz que o evento H tem $P(H) = 0,75$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Podemos colocar os dados em uma tabela, e completá-la evocando as seguintes propriedades:

- (i) Se $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$, então $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$. Isso quer dizer que a probabilidade da intersecção dos eventos “cliente gosta de salada” com “cliente é homem” tem probabilidade igual a $20\% * 75\% = 15\%$.
- (ii) $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$. Ou seja, $P(A) = 20\% * 75\% + 70\% * 25\% = 32,5\%$. A probabilidade de um cliente gostar de salada é de 32,5%.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Completando a tabela...

| | Salada | Carne | Total |
|--------|--------|-------|-------|
| Homem | 15% | 60% | 75% |
| Mulher | 17,5% | 7,5% | 25% |
| Total | 32,5% | 67,5% | |

Probabilidade - Probabilidade condicional

Basta agora consultar a tabela:

(a) Calcular $P(H)$, $P(A|H)$ e $P(B|M)$

$P(H) = 75\%$, $P(A|H) = 20\%$ e $P(B|M) = 30\%$. Todas essas são probabilidades informadas no enunciado.

(b) Calcular $P(A \cap H)$ e $P(A \cup H)$

$$P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = 20\% * 75\% = 15\%,$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \\ 32,5\% + 75\% - 15\% = 62,5\%$$

(c) Calcular $P(M|A)$

$$P(M|A) = P(A|M) \frac{P(M)}{P(A)} = 70\% \frac{25\%}{32,5\%} = 53,84\%.$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de $1/3$, $1/4$ e $1/5$, respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Considere os eventos:

A: Primeiro Motorista sofre acidente

B: Segundo Motorista sofre acidente

C: Terceiro Motorista sofre acidente

Com $P(A) = 2/3$, $P(B) = 3/4$ e $P(C) = 4/5$, respectivamente.

Assuma também que eles são independentes entre si.

Então $P(\text{todos sofrerem acidentes}) = P(A \cap B \cap C)$, mas pela independência, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ que é igual a $2/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente? Seja E o evento *todos os três sofrem acidente*. Então *pelo menos um não sofre acidente* é E^c . Além disso, $E = A \cap B \cap C$, e sabemos que $P(E) = 2/5$. Portanto $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada. Então, o nosso espaço amostral é

$$\Omega = \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ, QBBBQ, BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \dots, BBBBBBQQ\}$$

O evento *última defeituosa encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

$P(QBBQ \text{ ou } BQBQ \text{ ou } BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ)$ pois os eventos são disjuntos

$$P(QBBQ) = \frac{2}{8} \frac{6}{7} \frac{5}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$P(BQBQ) = \frac{6}{8} \frac{2}{7} \frac{5}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$P(BBQQ) = \frac{6}{8} \frac{5}{7} \frac{2}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

Ou seja, $P(\text{última defeituosa encontrada no quarto teste}) = \frac{3}{28}$