Métodos de estimação na Teoria da Resposta ao Item

Prof. Caio L n Azevedo

- Breve introdução a TRI e aos métodos de estimação
- Métodos de estimação em modelos de um único grupo
    - Estimação dos parâmetros dos itens
        - Máxima verossimilhança marginal
        - Moda marginal a posteriori
    - Estimação dos traços latentes
        - Máxima verossimilhança
        - Esperança a posteriori
        - Moda a posteriori
- Métodos de estimação em modelos de grupos múltiplos
    - Estimação dos parâmetros populacionais
    - Equalização

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2003).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

- Características.
  - Número elevados de parâmetros para estimar.
  - A verificação das propriedades dos estimadores é muito complicada.
  - Falta de identificabilidade.
  - Necessidade de utilização de métodos numéricos.
  - Espaços paramétricos restritos.
- Histórico.
  - Máxima Verossimilhança Marginal, MVM, (Bock and Lieberman, 1970).
  - MVM via pseudo algoritmo EM (Bock and Aitkin, 1981).
  - Moda marginal a posteriori via pseudo algoritmo EM (Mislevy, 1986).
  - MCMC via dados aumentados (Albert, 1992).
  - MCMC via algoritmo de MH (Patz and Junker, 1999).
  - Algoritmo EM via expansão paramétrica (Rubin and Thomas, 2000).
  - Algoritmo EM estocástico (SEM), (Fox, 2000).

$$P(Y_{ij}=1|(\theta_j,\zeta_i)) \quad = \quad c_i+(1-c_i)\frac{1}{1+e^{-Da_i(\theta_j-b_i)}}$$

$i=1,\ldots,I\,(item)$, $j=1,\ldots,n\,(individuo)$,

- Y_{ij} : é a resposta do indivíduo j ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_j : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ij} = 1|(\theta_j, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\,(item)$, $j = 1, \ldots, n\,(individuo)$,

- Y_{ij} : é a resposta do indivíduo j ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_j : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ij} = 1 | (\theta_j, \zeta_i)) \quad = \quad c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I \, (item)$, $j = 1, \ldots, n \, (individuo)$,

- Y_{ij} : é a resposta do indivíduo j ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_j : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ij} = 1|(\theta_j, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\,(item)$, $j = 1, \ldots, n\,(individuo)$,

- Y_{ij} : é a resposta do indivíduo j ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_j : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ij} = 1|(\theta_j, \zeta_i)) \quad = \quad c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\,(item)$, $j = 1, \ldots, n\,(individuo)$,

- Y_{ij} : é a resposta do indivíduo j ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_j : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-D\left((\theta_j - d) - (b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de $n \times I$.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-D\left((\theta_j - d) - (b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de n × I.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1+e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1+e^{-D\left((\theta_j - d)-(b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de n x I.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-D\left((\theta_j - d) - (b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de n x I.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-D\left((\theta_j - d) - (b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de n x I.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Maximizar a verossimilhança:

$$L(\theta, \zeta) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}$$

- Não identificabilidade

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{1+e^{-D\left(\theta_j - b_i\right)}} = \frac{1}{1+e^{-D\left((\theta_j - d) - (b_i - d)\right)}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-D\left(\theta_j^* - b_i^*\right)}} \end{aligned}$$

- Estimação simultânea.
  - Inversão de matrizes da ordem de n x I.
  - Comprometimento das propriedades assintóticas dos estimadores.
- Alternativa : Estimação por Máxima Verossimilhança Marginal.

- Considera-se uma distribuição de probabilidade para os traços latentes (não necessariamente no sentido bayesiano).
- Multiplica-se a verossimilhança original por essa densidade porposta e então integra-se com respeito aos traços latentes.
- Maximiza-se, então, essa verossimilhança marginal, com relação aos parâmetros dos itens.
- Suposição usual $\theta_j|\boldsymbol{\eta} \sim N(0,1)$, $\boldsymbol{\eta} = (\mu = 0, \psi = 1)$. Na opnião do palestrante (altamente) questionável.

- Probabilidade Marginal de Respostal

$$\begin{aligned} P\left(\mathbf{Y}_{.j}=\mathbf{y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right) \equiv P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right) &= \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.j}=\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\ &= \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.j}=\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\ &= \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta\,, \end{aligned}$$

em que $P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) = \prod_{i=1}^{I} P_i^{y_{ij}} Q_i^{1-y_{ij}}$ e $\boldsymbol{\eta}$ é chamado de vetor de parâmetros populacionais.

- Verossimilhança marginal

$$\begin{aligned} L\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right) &= \prod_{j=1}^{n} P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right) = \prod_{j=1}^{n} \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int_{\Re} \prod_{i=1}^{I} P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta\,. \end{aligned}$$

- logverossimilhança

$$l(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{j=1}^{n} ln \int_{\Re} \prod_{i=1}^{I} P\left(\mathbf{Y}_{ij} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i\right) g\left(\theta, \boldsymbol{\eta}\right) d\theta \, .$$

- Estimadores de Máxima verossimilhança (Marginal)

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \zeta \boldsymbol{\zeta}_i} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \ln P\left(\mathbf{Y}_{.j} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P\left(\mathbf{Y}_{.j} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right)} \frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{.j} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \, . \end{aligned}$$

- Mas,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i}\int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\
&= \int_{\Re}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right)\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\
&= \int_{\Re}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i}\prod_{h=1}^{I} P\left(\mathbf{Y}_{hj}|\theta,b_h\right)\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\
&= \int_{\Re}\left(\prod_{h\neq i}^{I} P\left(\mathbf{Y}_{hj}|\theta,b_h\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta \\
&= \int_{\Re}\left(\frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)/\partial \boldsymbol{\zeta}_i}{P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)}\right) P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right) g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right) d\theta\,.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P\left(Y_{ij}|\zeta_i,\theta\right)}{\partial \zeta_i} &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\left(P_i^{y_{ij}}Q_i^{1-y_{ij}}\right)\\ &= y_{ij}P_i^{y_{ij}-1}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i}\right)Q_i^{1-y_{ij}} + P_i^{y_{ij}}\left(1-y_{ij}\right)Q_i^{-y_{ij}}\left(\frac{-\partial P_i}{\partial \zeta_i}\right)\\ &= \left[y_{ij}P_i^{y_{ij}-1}Q_i^{1-y_{ij}} - P_i^{y_{ij}}\left(1-y_{ij}\right)Q_i^{-y_{ij}}\right]\left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i}\right).\end{aligned}$$

Notemos que o termo entre colchetes vale 1 quando $y_{ij}=1$ e -1 quando $y_{ij}=0$, portanto, podemos reescrevê-lo como $(-1)^{y_{ij}+1}$. Com isso,

$$\frac{\partial P\left(Y_{ij}|\zeta_i,\theta\right)}{\partial \zeta_i} = (-1)^{y_{ij}+1}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i}\right).$$

Note agora que

$$\frac{(-1)^{y_{ij}+1}P_iQ_i}{P_i^{y_{ij}}Q_i^{1-y_{ij}}} = \begin{cases} Q_i, & \text{se } y_{ij}=1\\ -P_i, & \text{se } y_{ij}=0\end{cases} = [y_{ij}-P_{ij}].$$

- Dessa forma, temos que

$$\frac{1}{P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)=\frac{\left(y_{ij}-P_i\right)}{P_iQ_i}\left(\frac{\partial P_i}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}\right),$$

Logo,

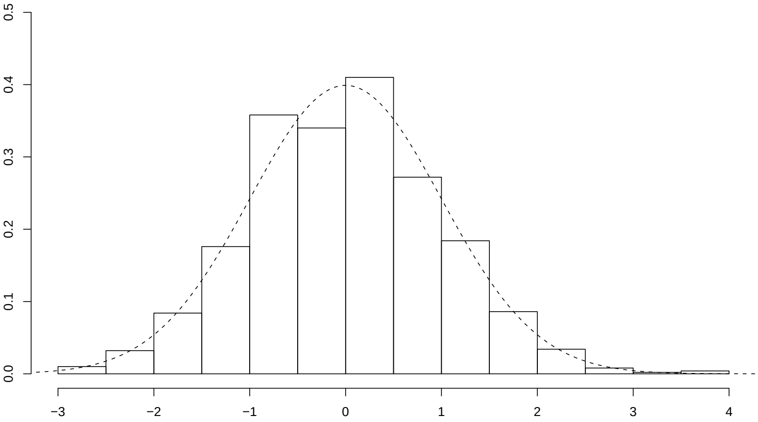
$$\frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i} = \int_{\Re}\left[\frac{\left(y_{ij}-P_i\right)}{P_iQ_i}\left(\frac{\partial P_i}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}\right)\right]P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right)g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right)d\theta \tag{1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_i &: \quad (1-c_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{\Re}\left[\left(y_{ij}-P_i\right)(\theta-b_i)\,W_i\right] g_j^*(\theta)=0 \\ b_i &: \quad -a_i\,(1-c_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{\Re}\left[\left(y_{ij}-P_i\right)W_i\right] g_j^*(\theta)=0 \\ c_i &: \quad \sum_{j=1}^{n}\int_{\Re}\left[\left(y_{ij}-P_i\right)\frac{W_i}{P_i^*}\right] g_j^*(\theta)\;=0\,, \end{aligned}$$

em que,

$$g_j^*(\theta)\equiv g\left(\theta|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)=\frac{P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta}\right)g\left(\theta|\boldsymbol{\eta}\right)}{P\left(\mathbf{Y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)}.$$


0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Forma de quadratura

$$
\begin{aligned}
a_i &: \quad (1-c_i)\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\left[(y_{ij}-P_{il})\left(\bar{\theta}_l-b_i\right)W_{il}\right]g_j^*\left(\bar{\theta}_l\right)=0\\
b_i &: \quad -a_i\,(1-c_i)\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\left[(y_{ij}-P_{il})\,W_{il}\right]g_j^*\left(\bar{\theta}_l\right)=0\\
c_i &: \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\left[(y_{ij}-P_{il})\frac{W_{il}}{P_{il}^*}\right]g_j^*\left(\bar{\theta}_l\right)=0
\end{aligned}
$$

Equação de Bock & Aitkin

$$
\begin{aligned}
a_i &: \quad (1-c_i)\sum_{l=q}^{n}\left[\left(\bar{r}_{il}-\bar{f}_{il}P_{il}\right)\left(\bar{\theta}_l-b_i\right)W_{il}\right]=0 \\
b_i &: \quad -a_i\,(1-c_i)\sum_{l=1}^{q}\left[\left(\bar{r}_{il}-\bar{f}_{il}P_{il}\right)W_{il}\right]=0 \\
c_i &: \quad \sum_{l=1}^{q}\left[\left(\bar{r}_{il}-\bar{f}_{il}P_{il}\right)\frac{W_{il}}{P_{il}^{*}}\right]=0,
\end{aligned}
$$

em que

$$
\bar{r}_{il}=\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\, g_j^{*}\left(\bar{\theta}_l\right) \quad , \quad \bar{f}_{il}=\sum_{j=1}^{n} g_j^{*}\left(\bar{\theta}_l\right).
$$

$$X_{(i)jl} = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo } j \text{ responde (é submetido) ao} \\ & \text{item } i \text{ e possui habilidade em torno de } \overline{\theta}_l \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}\left(F_{il}|\mathbf{Y}_{..},\zeta,\boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}\left(X_{(i)jl}|\mathbf{Y}_{..},\zeta,\boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{n} g_j^*\left(\overline{\theta}_l\right) = \overline{f}_{il}$$

e

$$\boldsymbol{E}\left(R_{il}|\mathbf{Y}_{..},\zeta,\boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}\left(y_{ij}X_{(i)jl}|\mathbf{Y}_{..},\zeta,\boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}g_j^*\left(\overline{\theta}_l\right) = \overline{r}_{il}.$$

- Calcula estimativas de máxima verossimilhança na presença de dados faltantes (processo iterativo).
- Aplicação na TRI : considerar as proficiências como os dados não observados.
- Implementação do algoritmo EM
  Seja $L(\boldsymbol{\zeta}|\mathbf{Y}_{..},\boldsymbol{\theta})$ a densidade conjunta do dados completos (verossimilhança) .
  Se $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^{(t)}$ é uma estimativa de $\boldsymbol{\zeta}$ na iteração t, então os passos EM para obtenção de $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^{(t+1)}$ são

  Passo E: Calcular $E[\ln L(\boldsymbol{\zeta}|\mathbf{Y}_{..},\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_{..},\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^{(t)}]$

  Passo M: Obter $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^{(t+1)}$ que maximiza a função do Passo E.
- No passo M a mazimização pode ser feita utilizando o algoritmo Newton-Raphson/Escore de Fisher.

- Considere uma população divididade em q categorias de proficiência e que dela se extrai uma amostra de tamanho n.
- Suponha que as proporções no item anterior são dadas por $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_q)'$.
- Denote por $\mathbf{f}_i$=$(f_{i1}, \cdots, f_{iq})'$ a quantidade de indivíduos em cada nível de habilidade e $\mathbf{r}_i$ =$(r_{i1}, \cdots, r_{iq})'$ a quantidade daqueles que respondem corretamente ao item i com nível de habilidade l, ambos observados na amostra. Além disso $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_I)'$.
- A probabilidade conjunta que os f_{il} indivíduos tenham habilidades $\overline{\theta}_l$, $l = 1, \cdots, q$, é dada pela distribuição multinomial:

$$P\left(\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i | \boldsymbol{\pi}\right) \equiv P(\mathbf{f}_i|\pi) = \frac{n_{(i)}!}{\prod_{l=1}^{q} f_{il}!} \prod_{l=1}^{q} \pi_j^{f_{il}}, \quad i = 1, \cdots, I,$$

- Dados f_{il} e $\overline{\theta}_l$, a probabilidade de ocorrerem r_{il} acertos ao item i dentre as f_{il} tentativas (respostas) por indivíduos com habilidade $\overline{\theta}_l$ é

$$P\left(R_{il} = r_{il} | f_{il}, \overline{\theta}_l\right) \equiv P(r_{il}|f_{il}, \overline{\theta}_l) = \binom{f_{il}}{r_{il}} P_{il}^{r_{il}} Q_{il}^{f_{il} - r_{il}},$$

- A probabilidade conjunta de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{r}$, dados $\overline{\boldsymbol{\theta}} = (\overline{\theta}_1, \cdots, \overline{\theta}_q)'$ e π, é

$$
\begin{aligned}
P\left(\mathbf{F} = \mathbf{f}, \mathbf{R} = \mathbf{r} | \overline{\boldsymbol{\theta}}, \pi\right) \equiv P(\mathbf{f}, \mathbf{r} | \overline{\boldsymbol{\theta}}, \pi) &= P(\mathbf{r} | \mathbf{f}, \overline{\boldsymbol{\theta}}, \pi) P(\mathbf{f} | \overline{\boldsymbol{\theta}}, \pi) \\
&= P(\mathbf{r} | \mathbf{f}, \overline{\boldsymbol{\theta}}) P(\mathbf{f} | \pi) \\
&= \left\{ \prod_{i=1}^{I} \prod_{l=1}^{q} P(r_{il} | f_{il}, \overline{\theta}_l) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{I} P(\mathbf{f}_i | \pi) \right\}
\end{aligned}
$$

- Segue que a log-verossimilhança para os dados completos é :

$$
\begin{aligned}
\ln L(\boldsymbol{\zeta}) &= \ln P(\mathbf{f} | \pi) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{q} \ln P(r_{il} | f_{il}, \overline{\theta}_l) \\
&= \ln P(\mathbf{f} | \pi) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{q} \left\{ \ln \binom{f_{il}}{r_{il}} + r_{il} \ln P_{il} + (f_{il} - r_{il}) \ln Q_{il} \right\} \\
&= C + \sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{I} \left\{ r_{il} \ln P_{il} + (f_{il} - r_{il}) \ln Q_{il} \right\},
\end{aligned}
$$

- Tomando a esperança da log-verossimilhança, condicionada a $(\mathbf{Y}'_{..}, \zeta')'$, para os dados completos, temos que

$$E[\ln L(\zeta)|(\mathbf{Y}'_{..}, \zeta')'] \quad = \quad \overline{C} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{q} \left\{ \overline{r}_{il} \ln P_{il} + (\overline{f}_{il} - \overline{r}_{il}) \ln Q_{il} \right\} ,$$

em que

$$\overline{r}_{il} = E[r_{il}|\mathbf{Y}_{..}, \zeta], \quad \overline{f}_{il} = E[f_{il}|\mathbf{Y}_{..}, \zeta] \quad \text{e} \quad \overline{C} = E[C|\mathbf{Y}_{..}, \zeta].$$

- Dessa forma, os passos E e M são :

Passo E
Usar os pontos de quadratura $\overline{\theta}_l$, os pesos A_l, $l = 1, \cdots, q$ e estimativas iniciais dos parâmetros dos itens, $\widehat{\zeta}_i$, $i = 1, \cdots, I$, para gerar $g_j^*(\overline{\theta}_l)$ e, posteriormente, $\overline{r}_{il}$ e $\overline{f}_{il}$, $i = 1, \cdots, I$ e $l = 1, \cdots, q$.
Passo M
Com **r** e **f** obtidos no Passo E, resolver as equações de estimação para ζ_i, $i = 1, \cdots, I$, usando o algoritmo de Newton-Raphson ou Escore de Fisher.

Posteriori

$$p(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y}_{..}) \quad \propto \quad \left\{\prod_{j=1}^{n}\int_{\Re}\prod_{i=1}^{I}P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right)d\theta\right\}\left\{\prod_{i=1}^{I}p(\boldsymbol{\zeta}_i|\boldsymbol{\tau}_i)\right\}\left\{\prod_{i=1}^{I}p(\boldsymbol{\tau}_i)\right\}$$

Log-posteriori

$$\begin{aligned}\ln p(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y}_{..}) \quad \propto \quad & \left\{\sum_{j=1}^{n}\ln\int_{\Re}\prod_{i=1}^{I}P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right)d\theta\right\}\left\{\sum_{i=1}^{I}\ln p(\boldsymbol{\zeta}_i|\boldsymbol{\tau}_i)\right\} \\ & \left\{\sum_{i=1}^{I}\ln p(\boldsymbol{\tau}_i)\right\}\end{aligned}$$

Maximizar a log-posteriori

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}\ln p(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y}_{..}) \quad \propto \quad \left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}\ln\int_{\Re}\prod_{i=1}^{I}P\left(\mathbf{Y}_{ij}|\theta,\boldsymbol{\zeta}_i\right)g\left(\theta,\boldsymbol{\eta}\right)d\theta\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\zeta}_i}\ln p(\boldsymbol{\zeta}_i|\boldsymbol{\tau}_i)\right\}$$

Parâmetro a

$$p(a_i|\mu_{a_i},\sigma^2_{a_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_i\sigma_{a_i}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2_{a_i}}(\ln a_i - \mu_{a_i})^2\right].$$

Parâmetro b

$$p(b_i|\mu_{b_i},\sigma^2_{b_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b_i}} \exp\left\{\frac{-(b_i - \mu_{b_i})^2}{2\sigma^2_{b_i}}\right\}$$

Parâmetro c

$$p(c_i|\alpha_i,\beta_i) = \frac{\Gamma(\alpha_i+\beta_i-2)}{\Gamma(\alpha_i-1)\Gamma(\beta_i-1)} c_i^{\alpha_i-2}(1-c_i)^{\beta_i-2}.$$

$$\mathbf{S}(\zeta_i)_B = \sum_{j=1}^{n} \left(y_{ij} - P_{ij}\right) W_{ij}\mathbf{h}_{ij} + \boldsymbol{\lambda}_i \,,$$

com

$$\mathbf{h}_{ij} = \left(P^*_{ij} Q^*_{ij}\right)^{-1} \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial \zeta_i}\right) = \begin{pmatrix} D\left(1 - c_i\right)\left(\theta_j - b_i\right) \\ -Da_i\left(1 - c_i\right) \\ \dfrac{1}{P^*_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \left[\frac{1}{a_i}\left[1 + \frac{\ln a_i - \mu_{a_i}}{\sigma^2_{a_i}}\right] ; -\frac{\left(b_i - \mu_{b_i}\right)}{\sigma^2_{b_i}} ; \frac{\alpha_i - 2}{c_i} - \frac{\beta_i - 2}{1 - c_i}\right]' .$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}_i'} \ln p(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} | \mathbf{y}_{..}) \quad \propto \quad \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}_i'} \ln \int_{\Re} \prod_{i=1}^{I} P\left(\mathbf{Y}_{ij} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i\right) g\left(\theta, \boldsymbol{\eta}\right) d\theta \right\}$$
$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}_i'} \ln p(\boldsymbol{\zeta}_i | \boldsymbol{\tau}_i) \right\}$$

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\zeta}_i)_{BM} = \sum_{l=1}^{q} \overline{f}_{il} P_{il}^{*} Q_{il}^{*} \mathbf{h}_{il} \mathbf{h}_{il}^{'} - \boldsymbol{\Lambda}_i \, .$$

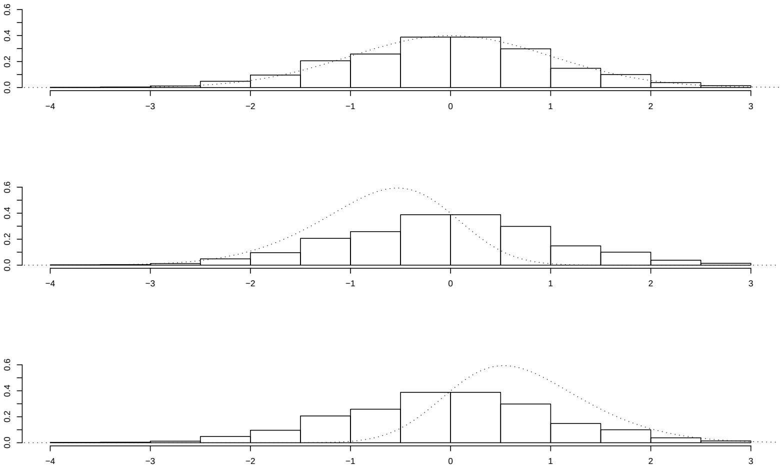
$$\boldsymbol{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \frac{\left[\sigma_{a_i}^2 + ln\, a_i - \mu_{a_i} - 1\right]}{\mu_{a_i}^2 \sigma_{a_i}^2} & . & . \\ 0 & -\frac{1}{\sigma_{b_i}^2} & . \\ 0 & 0 & -\left[\frac{\alpha_i - 2}{c_i^2}\right] + \frac{\beta_i - 2}{(1 - c_i)^2} \end{bmatrix} .$$

Máxima Verossimilhança Marginal - MVM:

- ⊕ Possui propriedades assintóticas: as estimativas dos parâmetros a_i, b_i e c_i são consistentes;
- ⊕ Uma vez estimados os parâmetros dos itens, pode-se estimar as habilidades através de métodos simples;
- ⊕ Permite resolver o problema de indeterminação (métrica) relativo ao modelo,uma vez que se atribui um parâmetro de escala e de posição para a distribuição das habilidades;
- ⊕ Permite caracterizar empiricamente a distribuição das habilidades;
- ⊖ Não está definido para itens com acerto total ou erro total;
- ⊖ É bastante trabalhoso computacionalmente;
- ⊖ Necessidade do estabelecimento de uma distribuição para θ;
- ⊖ Apresenta problemas na estimação do parâmetro c_i em alguns casos; deve ser usado somente com um número suficientemente grande de respondentes.

Moda marginal a Posteriori - MMAP:

- ⊕ Definido para qualquer padrão de resposta;
- ⊕ Uma vez estimados os parâmetros dos itens, pode-se estimar as habilidades através de métodos simples;
- ⊕ Permite resolver o problema de indeterminação (métrica) relativo ao modelo,uma vez que se atribui um parâmetro de escala e de posição para a distribuição das habilidades;
- ⊕ Permite caracterizar empiricamente a distribuição das habilidades;
- ⊖ É mais trabalhoso computacionalmente do que o MVM;
- ⊖ Necessidade de distribuições a priori para os parâmetros dos itens.

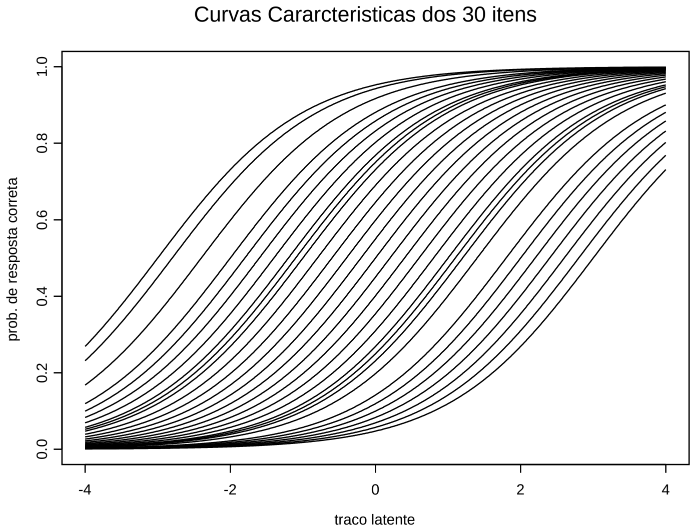

0.0
0.2
0.4
0.6
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

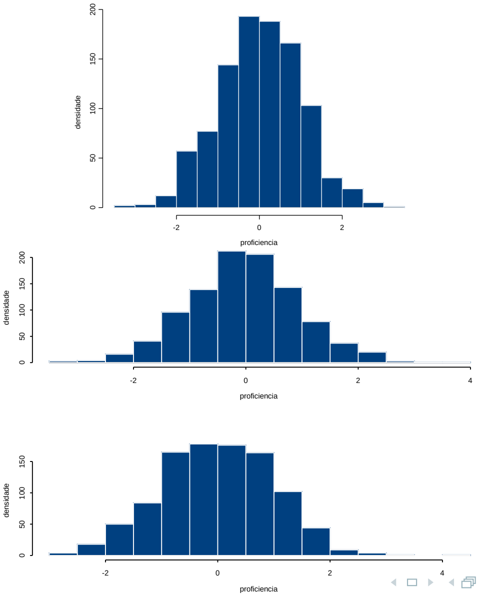
- É possível atualizar a distribuição dos traços latentes.
- Método de máxima verossimilhança não-paramétrica (Mislevy (1986)).
- Utiliza as quantidades $\overline{f}_{il}$ devidamente padronizadas.
- Especificar uma priori em forma de histograma.
- Mixtura de normais.

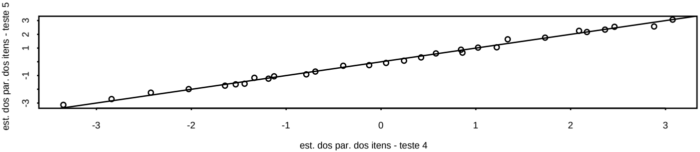
- Bilog: Desenvolvido para a plataforma Windows
- Estimação dos itens: MVM e MMAP.
- Acelerador de Ramsey.
- Regressão rígida.
- Estimação dos hiperparâmetros.
- Estimação das densidades latentes.
- Traços latentes: MV, EAP e MAP.

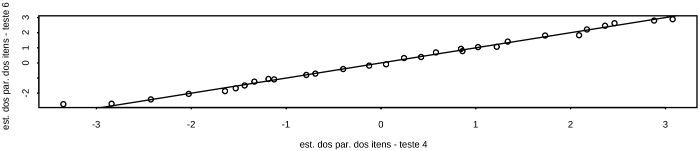
Considere um grupo de n=1000 indivíduos, com as proficiências conhecidas, submetido a uma prova com I = 30 itens (com os parâmetros desconhecidos)

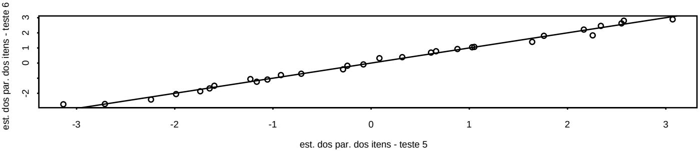
Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)
1	-3,0	1	-0,6	1	1,4
2	-2,8	2	-0,4	2	1,8
3	-2,4	3	-0,2	3	2,0
4	-2,0	4	0,0	4	2,2
5	-1,8	5	0,2	5	2,4
6	-1,6	6	0,4	6	2,6
7	-1,4	7	0,6	7	2,8
8	-1,2	8	0,8	8	3,0
9	-1,0	9	1,0	9	-1,1
10	-0,8	10	1,2	10	1,1


Curvas Cararcteristicas dos 30 itens
prob. de resposta correta
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
traco latente


densidade
0
50
100
150
200
-2
0
2
proficiencia
densidade
0
50
100
150
200
-2
0
2
4
proficiencia
densidade
0
50
100
150
-2
0
2
4
proficiencia


est. dos par. dos itens - teste 5
3
2
1
-1
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
est. dos par. dos itens - teste 4

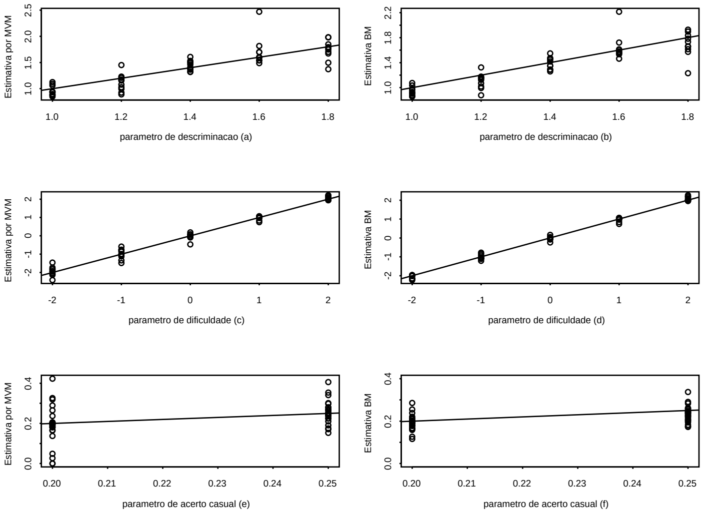

est. dos par. dos itens - teste 6
3
2
1
0
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
est. dos par. dos itens - teste 4

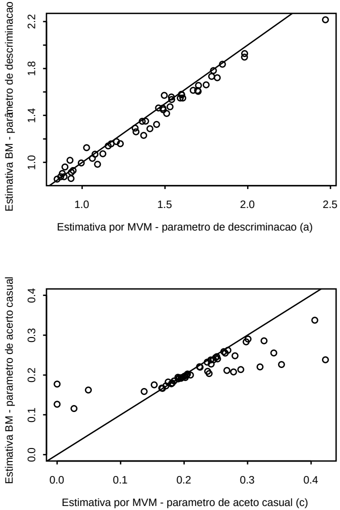

est. dos par. dos itens - teste 6
3
2
1
0
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
est. dos par. dos itens - teste 5

- Foram gerados $n = 5000$ valores independentes de uma distribuição N(0,1) a fim de servirem como as habilidades dos indivíduos.
- $I = 50$ itens de maneira a cobrir os valores apropriados para os parâmetros: a variando de 1,0 a 1,8, b variando de -2,0 a 2,0 e $c = 0{,}20$ e 0,25.
- Para a geração das respostas foi construído um programa em linguagem Ox.
- Para a obtenção das estimativas dos parâmetros (itens e habilidades) foi usado o programa Bilog

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas dos parâmetros dos itens

Estatística	**Parâmetro**					
	discriminação(a)		**dificuldade(b)**		**acerto casual (c)**	
	MVM	**BM**	**MVM**	**BM**	**MVM**	**BM**
SQR	1,74	1,30	1,81	0,65	0,31	0,07
SVar	1,27	0,92	3,10	0,89	0,75	0,14
SEQM	3,01	2,22	4,91	1,54	1,06	0,21


Estimativa por MVM
parametro de descriminacao (a)
Estimativa BM
parametro de descriminacao (b)
Estimativa por MVM
parametro de dificuldade (c)
Estimativa BM
parametro de dificuldade (d)
Estimativa por MVM
parametro de acerto casual (e)
Estimativa BM
parametro de acerto casual (f)


Estimativa BM - parâmetro de descriminacao
Estimativa por MVM - parametro de descriminacao (a)
1.0
1.4
1.8
2.2
1.0
1.5
2.0
2.5
Estimativa BM - parâmetro de dificuldade
Estimativa por MVM - parametro de dificuldade (b)
-2
-1
0
1
2
Estimativa BM - parametro de acerto casual
Estimativa por MVM - parametro de aceto casual (c)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

De posse das estimativas dos parâmetros dos itens constroi-se uma verossimilhança perfilada para estimar as proficiências

$$L(\boldsymbol{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{n} \widehat{P}_{ij}^{y_{ij}} \widehat{Q}_{ij}^{1-y_{ij}} \equiv P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} ,$$

$$l(\theta) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{I} \{ y_{ij} \ln P_{ij} + (1 - y_{ij}) \ln Q_{ij} \}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^{I} \{ y_{ij} \ln P_{ij} + (1 - y_{ij}) \ln Q_{ij} \}.$$

$$S(\theta_j) = \sum_{i=1}^{I} a_i(1-c_i)(y_{ij}-P_{ij})W_{ij}\,,$$

$$I(\theta_j) = \sum_{i=1}^{I} P_{ij}^{*} Q_{ij}^{*} W_{ij} h_{ij}^{2}\,,$$

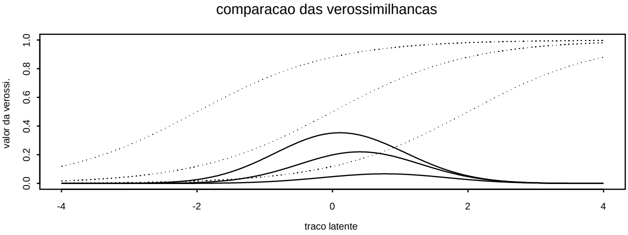
com

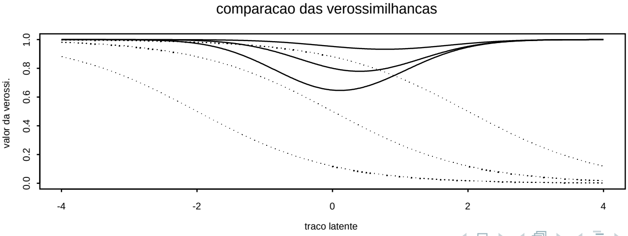
$$h_{ij} = (P_{ij}^{*}Q_{ij}^{*})^{-1}\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j}\right) = a_i(1-c_i)$$

e

$$H_{ij} = (P_{ij}^{*}Q_{ij}^{*})^{-1}\left(\frac{\partial^2 P_{ij}}{\partial \theta_j^2}\right) = a_i^2(1-c_i)(1-2P_{ij}^{*}).$$

- As estimativas de MV não estão definidas para escores nulos ou perfeitos.
- Escore nulo $L(\theta_j) = \prod_{i=I}(1 - P_{ij})$
- Escore perfeito $L(\theta_j) = \prod_{i=I}(P_{ij})$
- Solução: utilização de métodos bayesianos.


comparacao das verossimilhancas
valor da verossi.
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
traco latente


comparacao das verossimilhancas
valor da verossi.
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
traco latente

Log-posteriori

$$\ln g_j^*(\theta_j) = Const + \ln P(\mathbf{Y}_{.j}|\theta_j, \boldsymbol{\zeta}) + \ln g(\theta_j|\boldsymbol{\eta}). \tag{2}$$

Equação de estimação bayesiana

$$\frac{\partial \ln g_j^*(\theta_j)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \ln P(\mathbf{Y}_{.j}|\theta_j, \boldsymbol{\zeta})}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \ln g(\theta_j|\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_j} = 0.$$

Informação de Fisher

$$I(\theta_j) = \sum_{i=1}^{I} P_{ij}^* Q_{ij}^* W_{ij} h_{ij}^2 - \frac{1}{\sigma^2}. \tag{3}$$

Scoring de Fisher

$$\widehat{\theta}_j^{(t+1)} = \widehat{\theta}_j^{(t)} + I(\theta_j^{(t)})^{-1} S(\theta_j^{(t)})$$

$$g(\theta|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}) = \frac{P(\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta})g(\theta|\boldsymbol{\eta})}{P(\mathbf{y}_{.j}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})}. \tag{4}$$

Segue que a esperança da posteriori é

$$\widehat{\theta}_j \equiv E[\theta|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}] = \frac{\int_{\Re} \theta g(\theta|\boldsymbol{\eta})P(\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta})d\theta}{\int_{\Re} g(\theta|\boldsymbol{\eta})P(\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta})d\theta}.$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\left[\theta_j|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right] \quad &\approx \quad \boldsymbol{E}\left[\overline{\theta}_j|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right] = \frac{\sum_{l=1}^{q}\overline{\theta}_l P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})g(\overline{\theta}_l|\boldsymbol{\eta})}{\sum_{l=1}^{q} P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})g(\overline{\theta}_l|\boldsymbol{\eta})} \\ &= \quad \frac{\sum_{l=1}^{q}\overline{\theta}_l P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})A_l}{\sum_{l=1}^{q} P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})A_l}. \end{aligned}$$

E a variância a posteriori

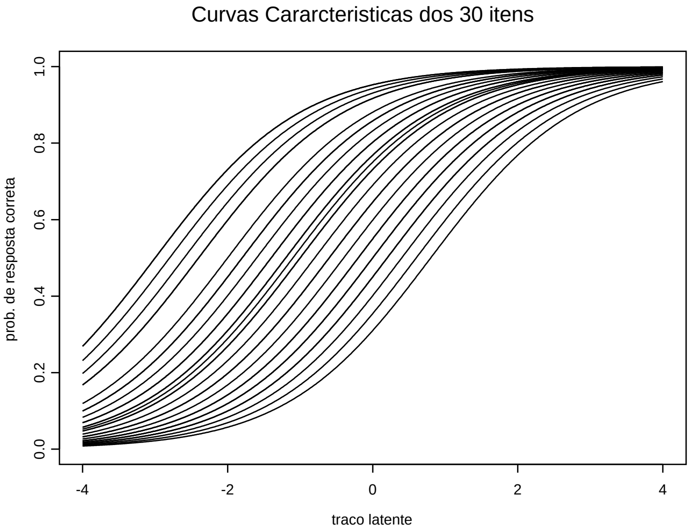
$$Var\left(\theta_j\right) \equiv Var[\theta|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}] = \frac{\int_{\Re}\left(\theta - E\left(\theta\right)\right)^2 g(\theta|\boldsymbol{\eta})P(\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta})d\theta}{\int_{\Re} g(\theta|\boldsymbol{\eta})P(\mathbf{y}_{.j}|\theta,\boldsymbol{\zeta})d\theta}.$$

$$Var\left[\overline{\theta}_j|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right] = \frac{\sum_{l=1}^{q}\left\{\overline{\theta}_l - \boldsymbol{E}\left[\overline{\theta}_j|\mathbf{y}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right]\right\}^2 P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})g(\overline{\theta}_l|\boldsymbol{\eta})}{\sum_{l=1}^{q} P(\mathbf{Y}_{.j}|\overline{\theta}_l,\boldsymbol{\zeta})g(\overline{\theta}_l|\boldsymbol{\eta})}$$

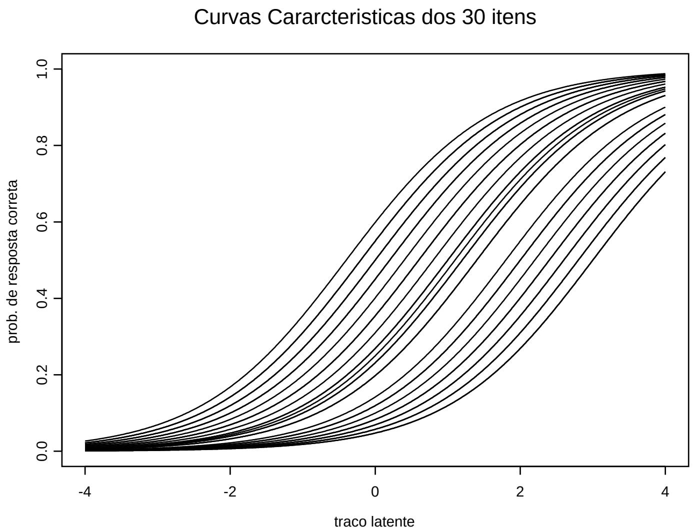
- Máxima Verossimilhança - MV :
  - ⊕ Para testes "longos" produz estimadores não viciados;
  - ⊖ Não está definido para alguns padrões de resposta.
- Bayesiano - EAP :
  - ⊕ Definido para qualquer padrão de resposta;
  - ⊕ Possui o menor erro médio;
  - ⊖ Viciado;
  - ⊖ Exige cálculos mais complexos do que o método de MV;
  - ⊖ Necessidade de uma distribuição a priori para θ.
- Bayesiano - MAP :
  - ⊕ Definido para qualquer padrão de resposta;
  - ⊖ Viciado.
  - ⊖ Exige cálculos mais complexos do que o método de MV;
  - ⊖ Necessidade de uma distribuição a priori para θ.

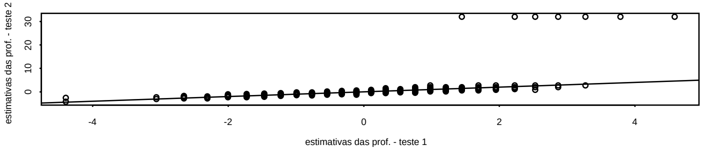
- As estimativas obtidas através da TRI possuem a propriedade da invariância, ou seja, uma vez obtidos os seus valores, estes são únicos.
- Considere a estimação das habilidades dos mesmos indivíduos obtidas a través de dois outros conjuntos de itens (provas).
- O primeiro conjunto é constituído de itens, em geral, mais fáceis que o primeiro conjunto. Já o segundo, é constituído de itens mais difíceis.

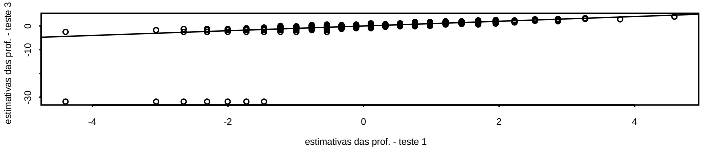
Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)
1	-3,0	1	-0,6	1	-2,4
2	-2,8	2	-0,4	2	-1,8
3	-2,4	3	-0,2	3	-1,4
4	-2,0	4	0,0	4	-1,0
5	-1,8	5	0,2	5	-0,6
6	-1,6	6	0,4	6	-0,2
7	-1,4	7	0,6	7	0,2
8	-1,2	8	0,8	8	-2,6
9	-1,0	9	-1,1	9	-1,2
10	-0,8	10	-3,0	10	0,0

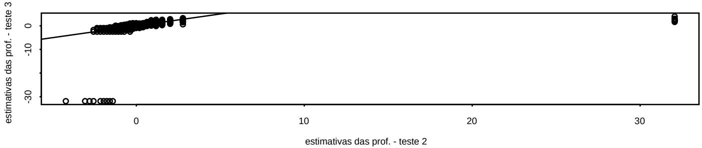

Curvas Cararcteristicas dos 30 itens
prob. de resposta correta
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
traco latente

Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)	Item	Dificuldade (b)
1	1,0	1	1,1	1	0,2
2	1,2	2	1,0	2	0,4
3	1,4	3	1,4	3	0,6
4	1,8	4	2,0	4	0,8
5	2,0	5	2,4	5	0,2
6	2,2	6	2,8	6	0,6
7	2,4	7	3,0	7	0,0
8	2,6	8	2,6	8	-0,2
9	2,8	9	1,2	9	-0,2
10	3,0	10	0,0	10	-0,4


Curvas Cararcteristicas dos 30 itens
prob. de resposta correta
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
traco latente


estimativas das prof. - teste 2
0
10
20
30
-4
-2
0
2
4
estimativas das prof. - teste 1

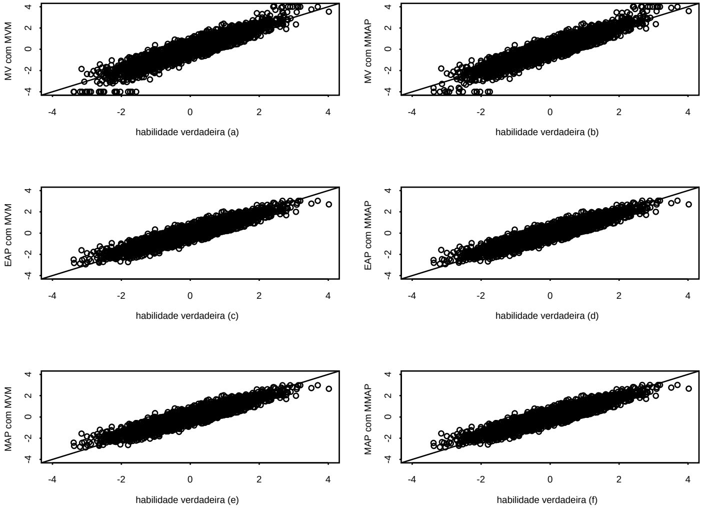

estimativas das prof. - teste 3
0
-10
-30
-4
-2
0
2
4
estimativas das prof. - teste 1


estimativas das prof. - teste 3
0
-10
-30
0
10
20
30
estimativas das prof. - teste 2

- MV com MVM : estimativa de máxima verossimilhança das habilidades usando a estimativa de máxima verossimilhança marginal dos parâmetros dos itens.
- MV com MMAP : estimativa de máxima verossimilhança das habilidades usando a estimativa bayesiana marginal dos parâmetros dos itens.
- EAP com MVM : estimativa da esperança a posteriori das habilidades usando a estimativa de máxima verossimilhança margianl dos parâmetros dos itens.
- EAP com MMAP : estimativa da esperança a posteriori das habilidades usando a estimativa de bayesiana marginal dos parâmetros dos itens.
- MAP com MVM : estimativa da moda a posteriori das habilidades usando a estimativa de máxima verossimilhança marginal dos parâmetros dos itens.
- MAP com MMAP : estimativa da moda a posteriori das habilidades usando a estimativa bayesiana marginal dos parâmetros dos itens.

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas das habilidades

Métodos de Estimação	**Estatísticas**		
	SQR	**SQVar**	**SQM**
MV com MVM	831,08	30938766,88	30939597,96
MV com MMAP	807,59	22954776,39	22955583,98
EAP com MVM	626,85	632,70	1259,55
EAP com MMAP	624,10	638,09	1262,20
MAP com MVM	628,80	617,02	1245,82
MAP com MMAP	625,44	623,37	1248,81


MV com MVM
habilidade verdadeira (a)
MV com MMAP
habilidade verdadeira (b)
EAP com MVM
habilidade verdadeira (c)
EAP com MMAP
habilidade verdadeira (d)
MAP com MVM
habilidade verdadeira (e)
MAP com MMAP
habilidade verdadeira (f)

- Considera a situação em que temos indivíduos pertencentes a diferentes grupos: séries, turnos, regiões.
- Indivíduos pertencentes a um mesmo grupo possuem características comuns e são mais semelhantes entre si do que indivíduos pertencentes a outros grupos.
- Os grupos são previamente definidos $\neq$ modelos de variáveis latentes.
- Modelo de grupos múltiplos Bock and Zimowski (1997).

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1 | (\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I \, (item)$, $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K, (grupo)$

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$\theta_{jk}|\boldsymbol{\eta}_k \sim N(\mu_k, \psi_k)$$

- Identificabilidade $\mu_1 = 0, \psi_1 = 1$.
- Estimar (μ_k, ψ_k), $k = 2, \ldots, K$.

Probabilidade marginal

$$P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right) = \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \theta\right) g\left(\theta | \boldsymbol{\eta}_k\right) d\theta$$

De modo que a verossimilhança é dada por

$$L\left(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{n_k} P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right)$$

E a log-verossimilhança, por sua vez, é dada por

$$l\left(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} lnP\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} lnP\left(\mathbf{Y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right)$$

- Estimadores de máxima verossimilhança marginal

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$$

- Sem solução explícita.
- Problema: dessa forma teríamos que estimar todos os parâmetros simultâneamente, pois $\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\zeta}\partial\boldsymbol{\eta}} \neq \mathbf{0}$
- Se $\boldsymbol{\eta}$, abordagem de Bock & Aitkin.
- Se $\boldsymbol{\zeta}$, estimativa do vetor $\boldsymbol{\eta}$ é relativamente simples.
- Abordagem, abordagem de Bock & Aitkin, parâmetros dos itens e populacionais: "Máxima verossimilhança marginal-perfilada".

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\zeta},\widehat{\boldsymbol{\eta}})}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial l\left(\widehat{\boldsymbol{\zeta}},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(\zeta_i) &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k}\left\{\frac{1}{P\left(\mathbf{Y}_{.jk}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}_k\right)}\frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{.jk}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}_k\right)}{\partial\zeta_i}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\sum_{l\in Q_k}\left(\overline{r}_{ilk}-\overline{f}_{ilk}P_{ilk}\right)W_{ilk}\mathbf{h}_{ilk}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{I}(\zeta_i) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l\in Q_k}\overline{f}_{ilk}P^{*}_{ilk}Q^{*}_{ilk}\mathbf{h}_{ilk}\mathbf{h}^{'}_{ilk}
$$

$$S\left(\mu_k\right) = \sigma_k^{-2} \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{l \in Q_k} g_{jk}^{*}\left(\bar{\theta}_{lk}\right)\left(\bar{\theta}_{lk} - \mu_k\right) \quad (5)$$

$$S\left(\sigma_k^2\right) = \left(2\sigma_k^4\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{l \in Q_k} g_{jk}^{*}\left(\bar{\theta}_{lk}\right)\left\{\left(\bar{\theta}_{lk} - \mu_k\right)^2 - \sigma_k^2\right\} \quad (6)$$

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\overline{\mu}}_{.k} \tag{7}$$

$$\widehat{\sigma}_k^2 = \widehat{\overline{\sigma}}^2_{.k} + \widehat{\overline{\delta}}^2_{.k} \tag{8}$$

Com

$$\widehat{\overline{\mu}}_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \widehat{\mu}_{jk}\,;\, \widehat{\overline{\sigma}}^2_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \widehat{\sigma}^2_{jk}\,;\, \widehat{\overline{\delta}}^2_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \left(\widehat{\mu}_{jk} - \widehat{\mu}_k\right)^2 \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{jk} &= \sum_{l \in Q_k} \overline{\theta}_{lk} g^*_{jk}\left(\overline{\theta}_{lk}\right) \\ \widehat{\sigma}^2_{jk} &= \sum_{l \in Q_k} \left(\overline{\theta}_{lk} - \widehat{\mu}_k\right)^2 g^*_{jk}\left(\overline{\theta}_{lk}\right) \end{aligned}$$

Adaptação do Algoritmo EM

De maneira análoga ao caso de uma população, podemos usar uma adaptação do **algoritmo EM**, de modo que os parâmetros populacionais de cada população sejam estimados, em separado, no **Passo E**, e que os parâmetros de cada item sejam estimados, em separado, no **Passo M**, como mostrado a seguir

Passo E

1. Usar os pontos de quadratura, $\overline{\theta}_{lk}$, os pesos associados $A_{lk}^{(t)}$, $l = 1, \ldots, q_k$, as estimativas no passo anterior dos parâmetros dos itens $\widehat{\zeta}_i^{(t)}$, $i = 1, \ldots, I$, e dos parâmetros populacionais, $\widehat{\mu}_k^{(t)}$ e $\widehat{\sigma}_k^{2\,(t)}$, $k = 1, \ldots, K$ para gerar $g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)^{(t)}$ e, posteriormente, $\overline{r}_{ilk}^{(t)}$ e $\overline{f}_{ilk}^{(t)}$, $i = 1, \ldots, I$ e $l = 1, \ldots, q_k$.
2. Usar os pontos de quadratura e $g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)^{(t)}$ para obter $\overline{\mu}_{.k}^{(t+1)}$, $\overline{\sigma}_{.k}^{2\,(t+1)}$ e $\overline{\delta}_{.k}^{(t+1)}$ através de (9), e posteriormente, $\widehat{\mu}_k^{(t+1)}$ e $\widehat{\sigma}_k^{2\,(t+1)}$ por (7) e (8).

Passo M

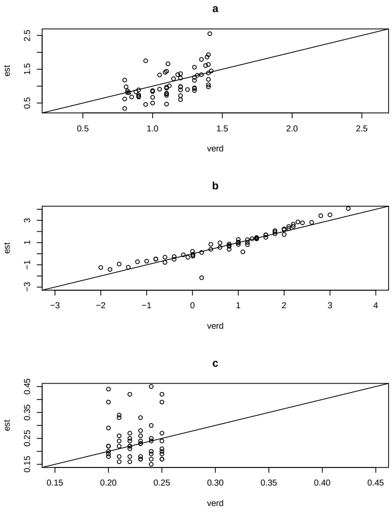
Com $\widehat{\mathbf{r}}^{(t)}$, $\widehat{\mathbf{f}}^{(t)}$ e $\widehat{\boldsymbol{\eta}}^{(t+1)}$ obtidos no Passo E, resolver as equações de estimação para $\boldsymbol{\zeta}_i$, $i = 1, \ldots, I$, usando Newton-Raphson ou Escore de Fisher através das expressões de (**??**) a (5).

A estimação dos traços latentes é, essencialmente, a mesma do caso de um único grupo.

- Bilog-MG: Desenvolvido para a plataforma Windows
- Estimação dos itens: MVM e MMAP.
- Acelerador de Ramsey.
- Regressão rígida.
- Estimação dos hiperparâmetros.
- Estimação das densidades latentes.
- Traços latentes: MV, EAP e MAP.
  - Prioris: especificada, N(0,1), estimada na Fase 2.
  - As estimativas podem ser prejudicadas pela má especificação das prioris.

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas dos parâmetros dos itens

Estatística	**Parâmetro**					
	discriminação(a)		**dificuldade(b)**		**acerto casual (c)**	
	MVM	**BM**	**MVM**	**BM**	**MVM**	**BM**
MDA	0,24	0,17	1,56	0,94	0,39	0,13
MDAR	0,27	0,19	0,30	0,15	0,09	0,03


a
est
verd
a
est
verd
b
est
verd

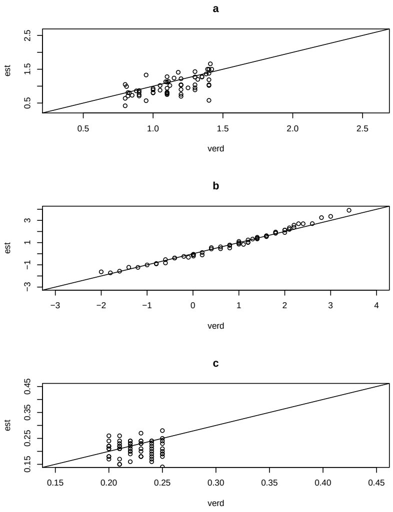
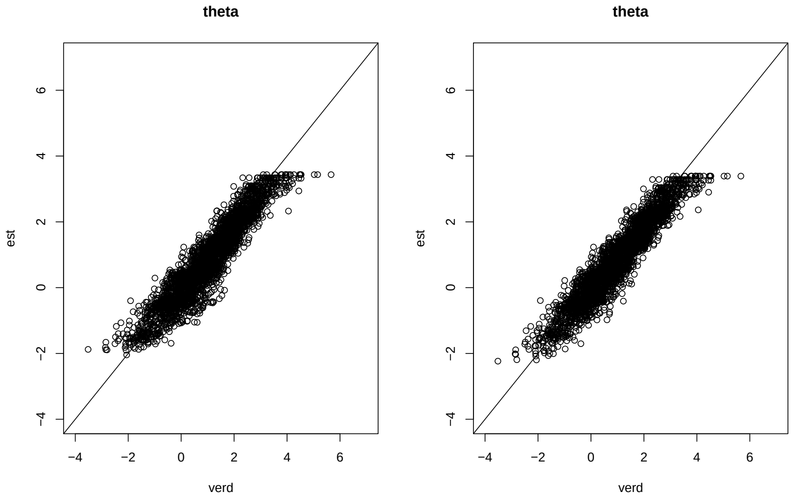

b
est
verd
c
est
verd
c
est
verd

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas dos parâmetros dos itens

Estatística	**Parâmetro**					
	pop 1		**pop 2**		**pop 3**	
	est	**ep**	**est**	**ep**	**est**	**ep**
media MVM	0,00	-	0,98	0,04	2,17	0,06
media MMAP	0,00	-	1,01	0,04	2,17	0,04
var MVM	1,00	-	1,21	0,04	2,04	0,07
var MMAP	1,00	-	1,02	0,04	1,35	0,04


theta
theta
est
est
verd
verd
−4
−2
0
2
4
6