Exemplos biparamétricos: comparação de duas distribuições de Poisson (Intervalos de credibilidade)

Prof. Caio Azevedo

Dados reais: comparação do número de acidentes

- Descrição: número de acidentes (com algum tipo de trauma para as pessoas envolvidas) em 92 dias (correspondentes) em dois anos distintos (1961 e 1962), medidos em algumas regiões da Suécia.
- Considerou-se apenas 43 dias, correspondendo a dias de 1961 em que não havia limite de velocidade e de 1962 em que havia limites de velocidade (90 ou 100 km/h).
- Vamos assumir que

$X_i|\lambda_1 \overset{i.i.d.}{\sim} Poisson(\lambda_1), i = 1, ..., 43$ (1961).

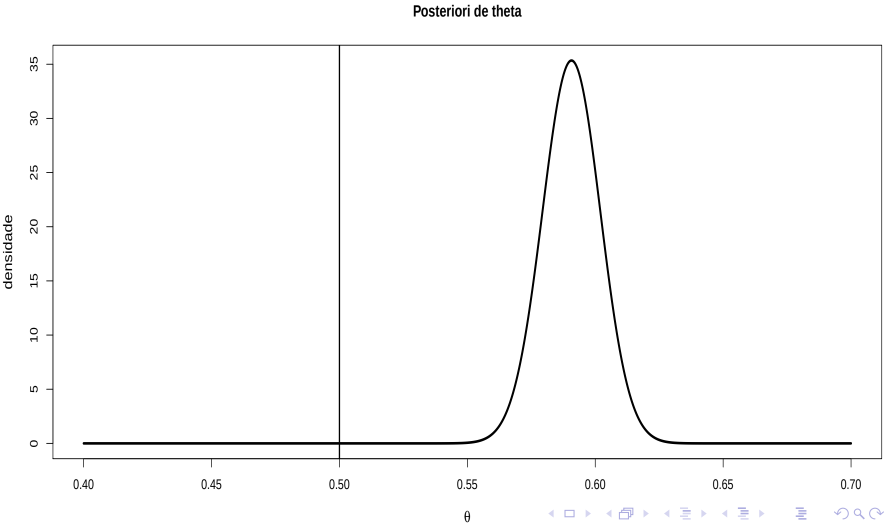
$Y_i|\lambda_2 \overset{i.i.d.}{\sim} Poisson(\lambda_2), i = 1, ..., 43$ (1962).

Dados reais: comparação do número de acidentes

- Assumiremos também que $p(\lambda_1, \lambda_2) \propto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\lambda_1)\mathbb{1}_{(0,\infty)}\mathbb{1}(\lambda_2)$.
- Dessa forma, teremos que (como já foi visto)

  $\lambda_1|\mathbf{x} \sim gama(n\overline{x} + 1, n^{-1})\perp\lambda_2|\mathbf{y} \sim gama(n\overline{y} + 1, n^{-1})$ (exercício).
- Assim, $\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim beta(n\overline{x} + 1, n\overline{y} + 1)$.

Dados reais: comparação do número de acidentes (cont.)



Dados reais: comparação do número de acidentes (cont.)

- Podemos facilmente obter um $IC_B(\theta, \gamma)$ simétrico, através do R, uma vez que $\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} | (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim beta(n\overline{x} + 1, n\overline{y} + 1)$
- Basta digitar

  $ICsim < -c(qbeta((1 - gammac) * 0.5, shape1 = n * xb + 1, shape2 = m * yb + 1), qbeta((1 + gammac) * 0.5, shape1 = n * xb + 1, shape2 = m * yb + 1))$

  em que *gammac* é o grau de credibilidade desejada.
- Para o intervalo $HPD(\theta, \gamma)$ basta usar a função *hpd*, ou seja $hpd(qbeta, shape1 = n*xb+1, shape2 = m*yb+1, conf = gammac)$

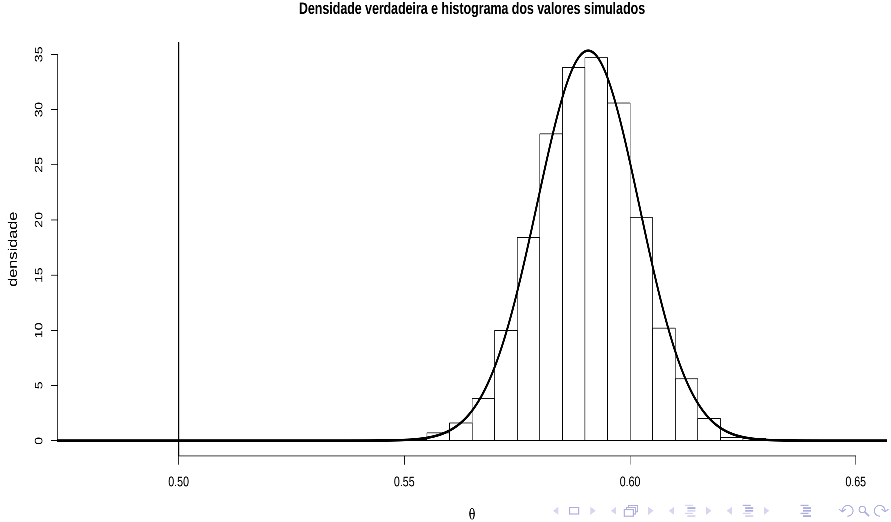
Dados reais: comparação do número de acidentes (cont.)

- Além disso, podemos calcular (motivados pelos objetivos e pela figura anterior) $P_{\theta|\mathbf{x})}(\theta > 1/2|\mathbf{x})$.
- No R, basta digitar $1 - pbeta(0.5, shape1 = n * xb + 1, shape2 = m * yb + 1)$.
- Os resultados foram:
  - $IC_B(\theta; 0,95) = [0,568; 0,613]$
  - $HPD(\theta; 0,95) = [0,568; 0,613]$
  - $P_{\theta|\mathbf{x})}(\theta > 1/2|\mathbf{x}) > 0,9999$
- Os resultados acima nos levam à concluir que $\theta > 0,5$ e que, portanto, houve um redução no número médio de acidentes (provavelmente devido à imposição de limites de velocidade).

Obtebdo a posteriori numericamente

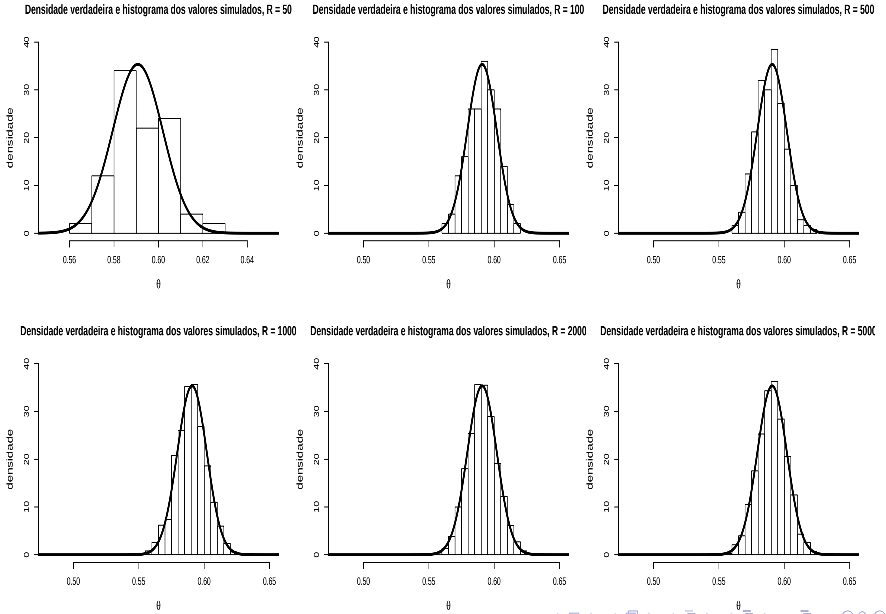
- Uma vez que $\lambda_1|\mathbf{x} \sim gama(n\overline{x}+1, n^{-1})$, $\lambda_2|\mathbf{y} \sim gama(n\overline{y}+1, n^{-1})$ e $\lambda_1|(\mathbf{x},\mathbf{y}) \perp \lambda_2|(\mathbf{x},\mathbf{y})$, podemos simular "R" variavéis aleatórias, mututamente independentes, com distribuições gama específicas, e calcular θ para cada par, ou seja:
- Simular $(\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}), r = 1, ..., R$ (das respectivas distribuições) e calcular $\theta^{(r)} = \frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}}$.
- Dessa forma, teremos uma aproximação numérica da posteriori de interesse.
- Os resultados obtidos anteriormente, podem ainda sê-lo, uma vez que se tenha uma amostra aleatória de tamanho R da posteriori.

Dados reais: comparação do número de acidentes (cont.)



Dados reais: comparação do número de acidentes (cont.)

- Para uma amostra aleatória de tamanho R = 2000 obtivemos
  - $IC_B(\theta; 0,95) = [0,569; 0,612]$
  - $HPD(\theta; 0,95) = [0,569; 0,612]$
  - $P(\theta > 1/2|\mathbf{x}) \approx 1$


Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 50
Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 100
Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 500
Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 1000
Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 2000
Densidade verdadeira e histograma dos valores simulados, R = 5000
densidade
θ
0
10
20
30
40
0.56
0.58
0.60
0.62
0.64
0.50
0.55
0.65