

# MA093 – Matemática básica 2

## Seções cônicas

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Novembro de 2018

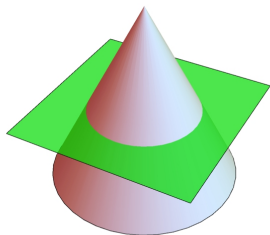
# Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

Seções cônicas:

- 1 circunferência;
- 2 elipse;
- 3 hipérbole;
- 4 parábola.

# Seções cônicas

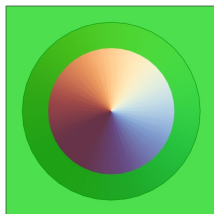


## Definição

Uma seção cônica é a curva plana obtida pela interseção de um cone e um plano. Essa curva é a representação no plano Cartesiano da equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

# Circunferência



## Circunferência

Um exemplo de seção cônica é a circunferência:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

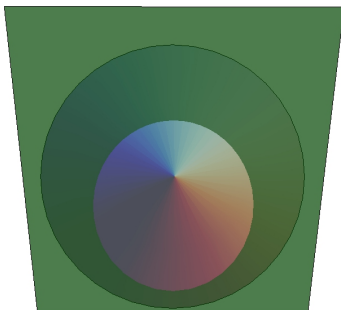
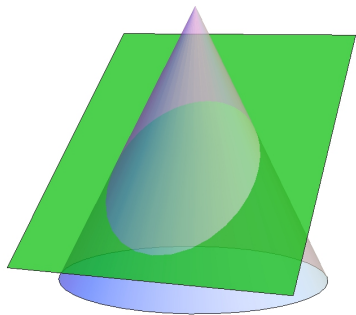
Aplicando as regras de produtos notáveis, temos

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2.$$

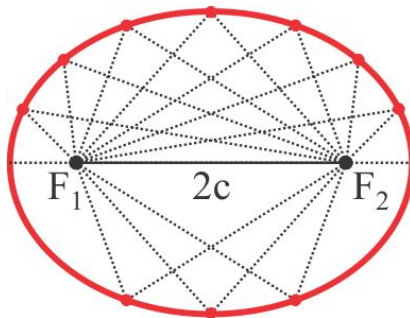
Reorganizando essa equação, obtemos

$$\underbrace{x^2}_{ax^2} + \underbrace{0xy}_{bxy} + \underbrace{y^2}_{cy^2} + \underbrace{(-2x_0)x}_{dx} + \underbrace{(-2y_0)y}_{ey} + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_f = 0.$$

# A elipse



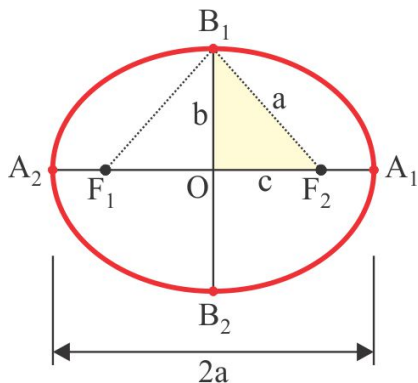
# A elipse



## Definição

Sejam dados dois pontos distintos do plano,  $F_1$  e  $F_2$ , de modo que a distância entre eles seja  $2c$ . Definimos como **elipse** o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é a constante  $2a$ , em que  $a > c$ .

# Elementos



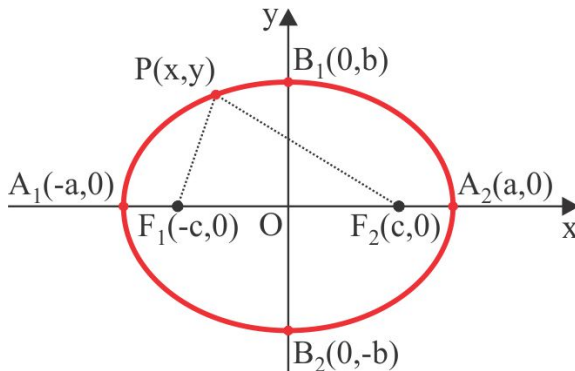
## Elementos

- $F_1$  e  $F_2$ : focos.
- $\overline{A_1A_2}$ : eixo maior.
- $\overline{B_1B_2}$ : eixo menor.
- $O$ : centro.
- $2a$ : medida do eixo maior.
- $2b$ : medida do eixo menor.
- $2c$ : distância focal.
- $c/a$ : excentricidade.

## Relação entre $a$ , $b$ e $c$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

## Elipse horizontal, centrada na origem

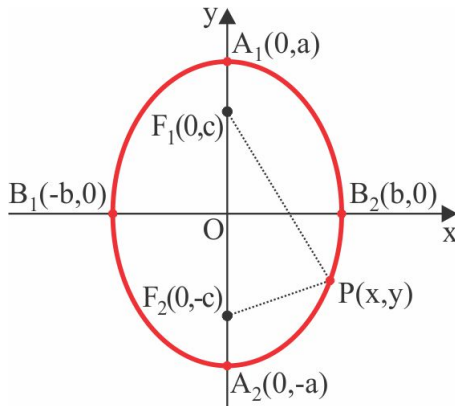


Equação da elipse com eixo maior horizontal, centrada na origem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



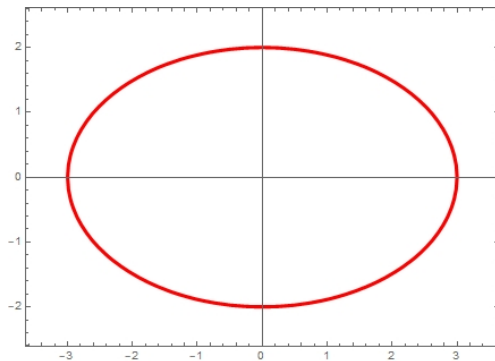
## Elipse vertical, centrada na origem



Equação da elipse com eixo maior vertical, centrada na origem

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

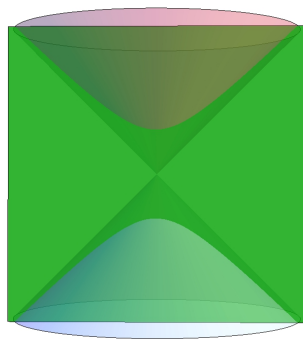
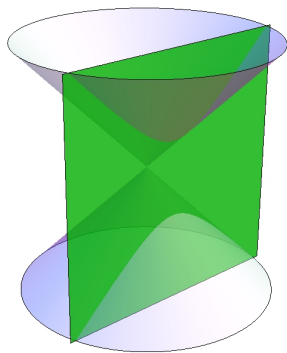
# Exemplo de elipse



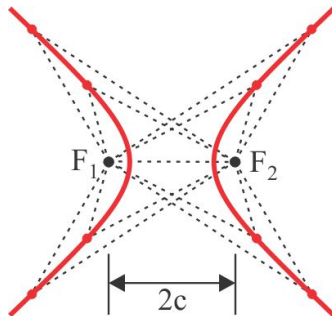
Elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

# A hipérbole



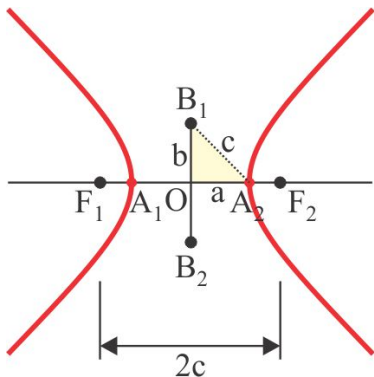
# A hipérbole



## Definição

Sejam dados dois pontos distintos do plano,  $F_1$  e  $F_2$ , de modo que a distância entre eles seja  $2c$ . Definimos como **hipérbole** o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é a constante  $2a$ , em que  $0 < a < c$ .

# Elementos



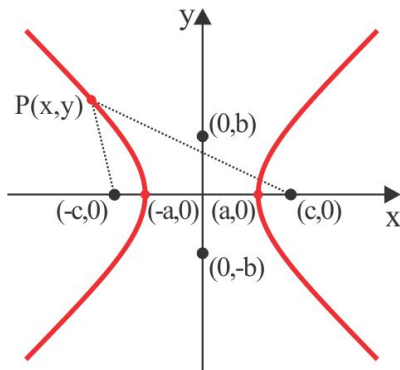
## Elementos

- $F_1$  e  $F_2$ : focos.
- $\overline{A_1A_2}$ : eixo real.
- $\overline{B_1B_2}$ : eixo imaginário.
- $O$ : centro.
- $2a$ : medida do eixo real.
- $2b$ : medida do eixo imaginário.
- $2c$ : distância focal.
- $c/a$ : excentricidade.

## Relação entre $a$ , $b$ e $c$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

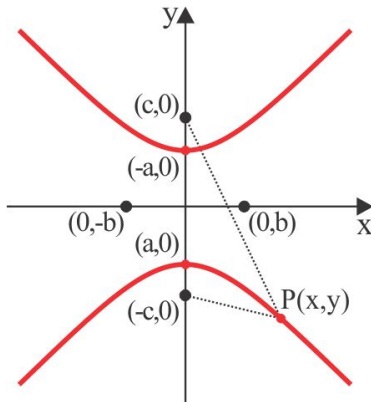
# Hipérbole com focos no eixo $x$



Equação da hipérbole com focos no eixo  $x$  e centro na origem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

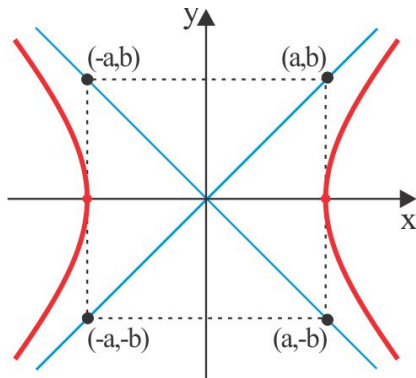
# Hipérbole com focos no eixo $y$



Equação da hipérbole com focos no eixo  $y$  e centro na origem

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

# Assíntotas

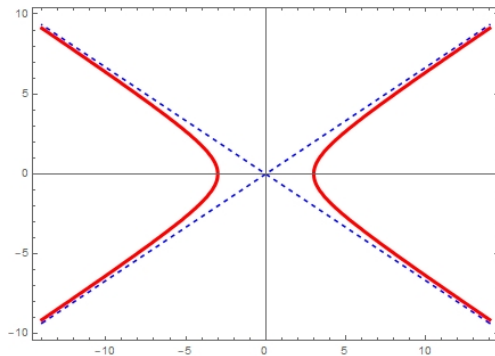


Assíntotas (retas azuis)

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$



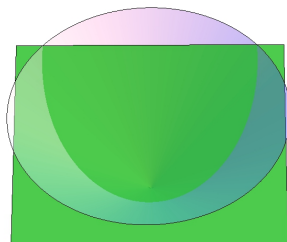
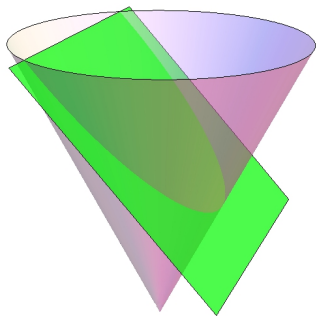
# Exemplo de hipérbole



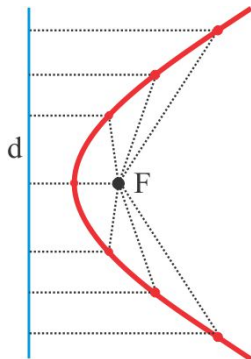
hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

# A parábola



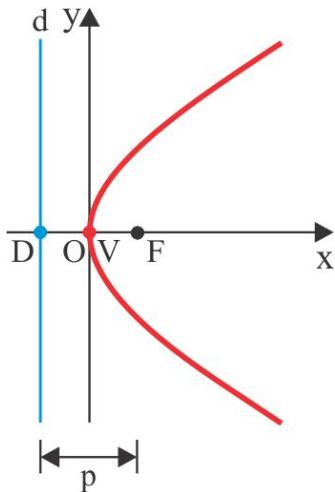
# A parábola



## Definição

Definimos como **parábola** o conjunto dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto  $F$  e de uma reta  $d$  desse plano.

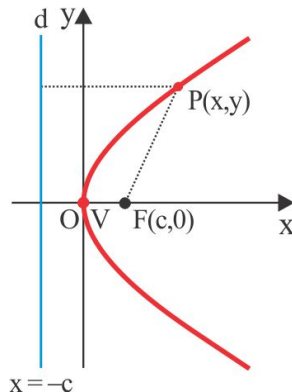
# Elementos



## Elementos

- $F$ : foco.
- $V$ : vértice (ponto médio de  $\overline{DF}$ ).
- $d$ : diretriz.
- Reta  $VF$ : eixo de simetria.
- $p$ : parâmetro (medida de  $\overline{DF}$ ).

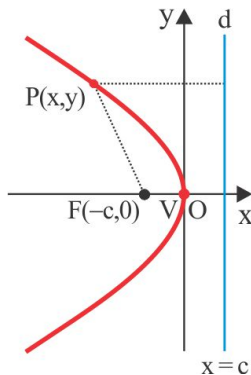
# Parábola com foco no eixo $x$



Equação da parábola com foco em  $(c, 0)$  e vértice na origem

$$y^2 = 4cx.$$

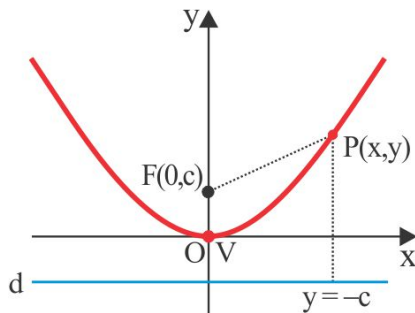
# Parábola com foco no eixo $x$



Equação da parábola com foco em  $(-c, 0)$  e vértice na origem

$$y^2 = -4cx.$$

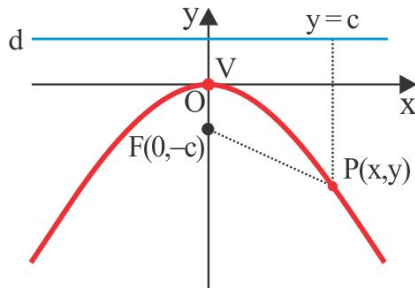
# Parábola com foco no eixo $y$



Equação da parábola com foco em  $(0, c)$  e vértice na origem

$$x^2 = 4cy.$$

# Parábola com foco no eixo $y$

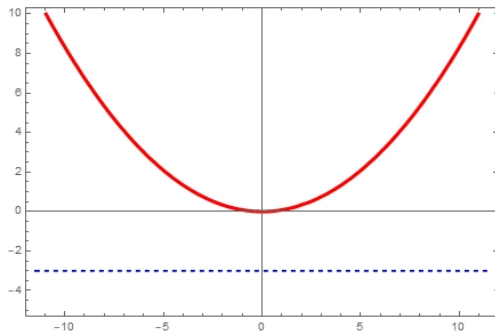


Equação da parábola com foco em  $(0, -c)$  e vértice na origem

$$x^2 = -4cy.$$



# Exemplo de parábola



parábola

$$x^2 = 12y.$$

## Tópicos da 3ª prova – Matrizes e sistemas lineares

- 1 Formulação de problemas práticos
- 2 Solução de sistemas com 2 variáveis por substituição
- 3 Solução gráfica de sistemas com 2 variáveis
- 4 Representação matricial de sistemas
- 5 Solução de sistemas pelo método da eliminação
- 6 Discussão sobre a existência de solução de sistemas
- 7 Aplicação de sistemas à obtenção de polinômios
- 8 Solução de sistemas não lineares
- 9 Operações com matrizes (+, −, ×, mult p/ escalar, transp.)
- 10 Propriedades de matrizes
- 11 Matriz inversa
- 12 Determinantes
- 13 Aplicações do determinante: existência de inversa; existência de solução única de um sistema linear; cálculo da área de um triângulo; verificação do alinhamento de 3 pontos.

## Tópicos da 3ª prova – Geometria analítica

- 1 Distância entre pontos
- 2 Ponto médio de um segmento
- 3 Equação geral e equação reduzida da reta
- 4 Relação entre coeficiente angular e tangente do ângulo entre uma reta e o eixo-x
- 5 Retas paralelas
- 6 Retas perpendiculares
- 7 Projeção ortogonal
- 8 Distância de ponto a reta
- 9 Distância entre retas paralelas
- 10 Ângulo entre retas
- 11 Equação da circunferência e inequação que define um círculo
- 12 Posição de um ponto com relação a uma circunferência
- 13 Interseção entre reta e circunferência
- 14 Posição relativa entre reta e circunferência

# Fórmulas

$$① A = 0,5|\det(M)|$$

$$② ax + by + c = 0 \quad y = mx + q$$

$$③ (y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$④ m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

$$⑤ m_s = -1/m_r$$

$$⑥ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$⑦ d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$⑧ \tan(\theta) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

$$⑨ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$