MA093 – Matemática básica 2

Projeção ortogonal. Distância entre ponto e reta. Distância entre retas paralelas

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Novembro de 2018

Tópicos importantes

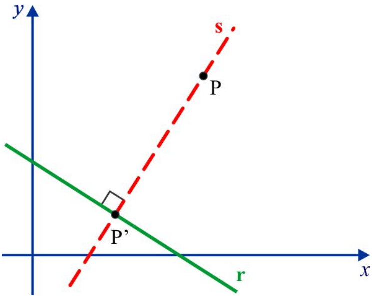
O objetivo dessa aula é investigar

1. projeção de ponto sobre reta;
2. distância de ponto a reta;
3. distância entre retas paralelas.

Projeção ortogonal

Definição

- A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P' de r que está mais próximo de P.
- P' é o ponto de interseção entre a reta r e a reta s que passa por P e é perpendicular a r.



- P' é a projeção de P em r
- s passa por P e por P'
- s é perpendicular a r
- P' é o ponto de interseção entre r e s

Exemplo 1

Problema

Encontre a projeção ortogonal de $P(2,-1)$ sobre $r: \; y = 3x - 4$.

1. Observamos que $m_r = 3$
2. Como s é perpendicular a r, temos $m_s = -1/m_r = -1/3$
3. Equação de s:

$$y - (-1) = -\frac{1}{3}(x-2) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

4. O ponto de interseção entre r e s é solução de:

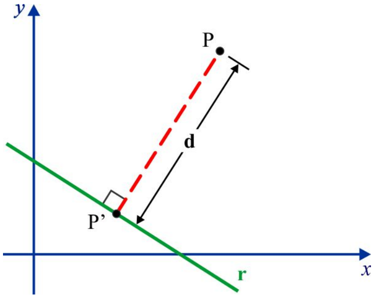
$$\begin{cases} y &= 3x - 4 \\ y &= -\frac{x}{3} - \frac{1}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3x - 4 = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{10x}{3} = \frac{11}{3}$$

5. Logo, $x = \frac{11}{10}$, e $y = 3 \cdot \frac{11}{10} - 4 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{7}{10}$

Distância de ponto a reta

Definição

A distância d entre um ponto P e uma reta r é a distância entre P e P', a projeção ortogonal de P em r.



- P' é a projeção de P em r
- d é a distância entre P e P'

Exemplo 2

Problema

Determine a distância de $P(2,-1)$ à reta $r: \; y = 3x - 4$.

- Como vimos no exercício anterior, a projeção de P sobre r é

$$P'\left(\frac{11}{10}, -\frac{7}{10}\right)$$

- Logo, $d = \sqrt{(x_{P'} - x_P)^2 + (y_{P'} - y_P)^2}$

$$d = \sqrt{\left(\frac{11}{10} - 2\right)^2 + \left(-\frac{7}{10} - (-1)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{90}{100}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Distância de ponto a reta: fórmula prática

Fórmula da distância entre ponto e reta

Seja a reta r dada pela equação geral $r: \ ax + by + c = 0$.
A distância entre um ponto $P(x_P, y_P)$ e r é definida por

$$d = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo

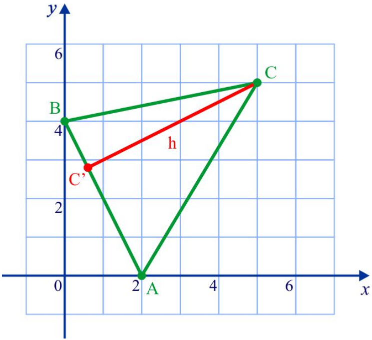
Determine a distância entre $P(2, -1)$ e $r: \ y = 3x - 4$.

- Equação geral de r: $3x - y - 4 = 0$.
- $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - (-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|6 + 1 - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Exemplo 3

Problema

Dado um triângulo com vértices $A(2,0)$, $B(0,4)$ e $C(5,5)$, determine a altura relativa ao lado $\overline{AB}$



- h é a altura relativa a AB
- C' é a projeção de C em AB
- h é a distância entre C e C'

Exemplo 3

- Pontos: $A(2,0)$, $B(0,4)$ e $C(5,5)$
- Achando a equação geral da reta que passa por A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-0}{0-2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$y - 4 = -2(x-0) \quad \to \quad y - 4 = -2x \quad \to \quad 2x + y - 4 = 0$$

- A altura é a distância de C à reta:

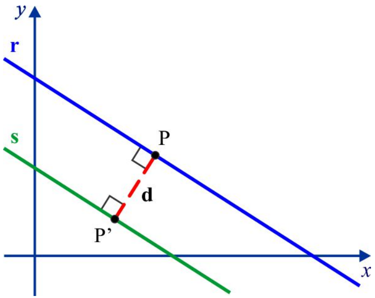
$$d = \frac{|a\,x_C + b\,y_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2\cdot 5 + 1\cdot 5 - 4|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$= \frac{|11|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Distância entre duas retas paralelas

Definição

A distância d entre duas retas paralelas r e s é igual à distância entre um ponto P de r e (sua projeção ortogonal P' sobre) a reta s.



- P é um ponto qualquer de r
- d é a distância entre P e s
- P' é a projeção de P em s
- d é a distância entre P e P'

Exemplo 4

Problema

Determine a distância entre

$$r:\ 3x - 2y + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad s:\ 3x - 2y - 1 = 0.$$

- Encontrando um ponto P de r:

$$\text{se } x = 0 \ \rightarrow\ -2y+4 = 0 \ \rightarrow\ 2y = 4 \ \rightarrow\ y = 2 \ \rightarrow\ P(0,2)$$

- Determinando a distância de P a s:

$$d = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

Distância entre retas paralelas: fórmula prática

Fórmula da distância entre duas retas paralelas

Sejam dadas as retas $r: \ ax + by + c = 0$ e $s: \ ax + by + c' = 0$ (note que as duas equações têm os mesmos coeficientes a e b).
A distância entre r e s é dada pela fórmula

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo

Determine a distância entre

$$r: \ 3x - 2y + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad s: \ 3x - 2y - 1 = 0.$$

$$d = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

Exercício 1

Problema

Determine a projeção ortogonal de $P(-5, 8)$ sobre a reta

$$r: \; y = \frac{x}{2} - 4$$

$$P'\left(\frac{4}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

Exercício 2

Problema

Determine a distância entre $P(1,4)$ e $r: \; y = 3x + 1$

0

Exercício 3

Problema

Dado o triângulo ABC cujos vértices têm coordenadas $A(0,3)$, $B(2,1)$ e $C(4,5)$, determine

1. A equação da reta suporte ao lado AB.
2. A altura do triângulo com relação ao lado AB.

$$x + y - 3 = 0 \qquad h = 3\sqrt{2}$$

Exercício 4

Problema

Determine a distância entre as retas paralelas

$$r: \ 2x - 6y - 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad s: \ -\frac{x}{2} + \frac{3y}{2} - 4 = 0.$$

$$\sqrt{10}$$

Exercício 5

Problema

Uma reta s está a uma distância de $\sqrt{2}$ unidades da reta

$$r: \ x - y = -1.$$

Determine as duas possíveis equações de s.

$$x - y + 3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x - y - 1 = 0$$