MA093 – Matemática básica 2

Operações com matrizes

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Outubro de 2018

Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

1. quando duas matrizes são iguais;
2. a soma de matrizes;
3. a multiplicação de matriz por número real;
4. a multiplicação de matrizes.

Igualdade de matrizes

Definição

Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são **iguais** se têm a mesma ordem $(m \times n)$ e se

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemplos de matrizes que não são iguais:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Soma de matrizes

Definição

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de ordem $m \times n$, definimos a soma $A + B$ como a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+8 & 5+(-2) \\ 0+(-1) & -4+6 & 1+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

Definição

Dados o escalar real c e a matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$, o produto cA é a matriz $B = [b_{ij}]$, de ordem $m \times n$, tal que

$$b_{ij} = c \cdot a_{ij} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad c = 3$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Transformação de uma foto colorida em preto e branco

Uma fotografia colorida é composta por três matrizes separadas:

$$M_{vermelho}, \ M_{verde} \text{ e } M_{azul} \quad \text{(RGB)}$$

Transformação de uma foto colorida em preto e branco

$M_{vermelho}$ em p&b

M_{verde} em p&b

M_{azul} em p&b

$$0,30 \times M_{vermelho} + 0,59 \times M_{verde} + 0,11 \times M_{azul}$$

Combinando soma e multiplicação por escalar

Subtração

Definimos a diferença entre A e B como

$$A - B = A + (-1)\,B$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-2 & 0-(-3) \\ -1-4 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de vetor linha por vetor coluna

Definição

Dados os vetores $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$,

o produto AB é definido pelo número real

$$c = \sum_{k=1}^{p} a_i b_i \; = \; a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p.$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = 6 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \; = \; 13$$

Multiplicação de matrizes

Definição

Seja A uma matriz $m \times p$ e B uma matriz $p \times n$. Definimos o produto AB como a matriz $C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$, tal que

c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = -1 \qquad C = \begin{bmatrix} * & * \\ -1 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Note que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B

Multiplicação de matrizes

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{c|c} 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \hline -1 & 4 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c|c} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) \\ \hline (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 6 + 4 \cdot (-3) \\ \hline 0 \cdot 5 - 2 \cdot 1 & 0 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) \end{array}\right]
\end{array}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -1 & -18 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 6 & 4 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} 4x + 2y - 1z \\ \hline 1x - 3y + 0z \\ \hline 0x + 6y + 4z \end{array}\right] \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 4x + 2y - z \\ x - 3y \\ 6y + 4z \end{bmatrix}$$

Transposição

Definição

Dada a matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$, definimos sua transposta como a matriz $A^T = [a_{ji}]$, cuja ordem é $n \times m$.

Em outras palavras, a transposta de A é a matriz cujas linhas são as colunas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 1

Problema

Dadas as matrizes abaixo, indique as operações que podem ser efetuadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A) $B - A$

B) $C + F$

C) $E + D$

D) $A + 2B$

Exercício 2

Problema

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

calcule $C = A - B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercício 3

Problema

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule $C = 2A + B^T$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 4

Problema

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

calcule $C = AB$.

-5

Exercício 5

Problema

Dadas as matrizes abaixo, indique as operações que não podem ser efetuadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A) CF

B) AF

C) $C^T B$

D) DE

Exercício 6

Problema

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

calcule AX.

$$AX = \begin{bmatrix} 2x + y + 4z \\ 5x - 3y + 2z \\ -x + 6y + 3z \end{bmatrix}$$

Exercício 7

Problema

Dadas as matrizes

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

calcule $M = DG$.

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$$