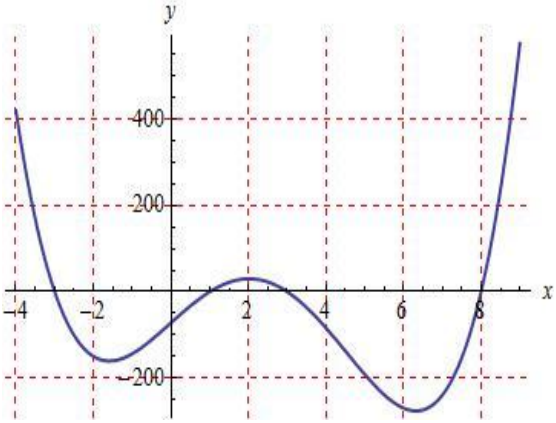
Oitava lista de exercícios.
Funções e equações polinomiais e racionais.

1. Trace o gráfico e determine os mínimos e máximos locais de cada função.

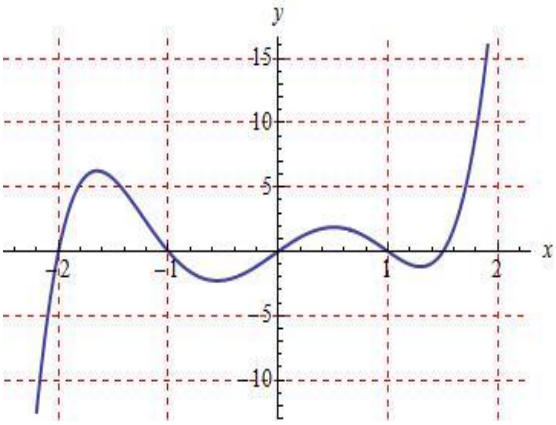
   a) $f(x) = (x-1)(x+2)$.
   b) $f(x) = (-3-x)(x+3)$.
   c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
   d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.
   e) $f(x) = 4x + x^2$.
   f) $f(x) = -x^2 - 4$

2. Os gráficos algumas funções polinomiais foram desenhados abaixo, com o auxílio de um programa matemático. Determine aproximadamente os pontos de mínimo e máximo local e os valores correspondentes de cada função.

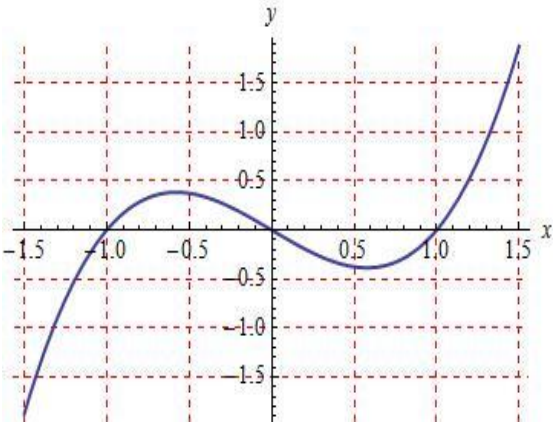
   a)



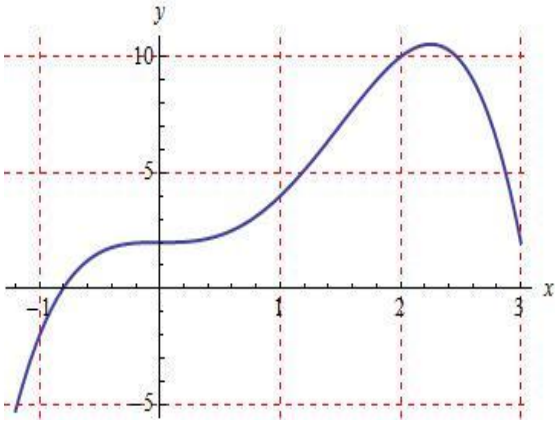
   b)



   c)



   d)



3. Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, a altura (em metros) do peso lançado por um atleta seguiu a função $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}1$, em que x é a distância horizontal percorrida pelo peso.

   a) Determine de que altura o peso foi lançado.
   b) Determine a altura máxima do peso e a que distância isso ocorreu.
   c) Calcule a distância horizontal percorrida pelo peso.

4. Um cinema cobra R$ 20,00 pelo ingresso no fim de semana, atraindo 300 espectadores por sessão. Entretanto, para cada R$ 1,00 de desconto no preço, o cinema consegue mais 20 clientes por sessão.

a) Escreva a função que fornece a receita por sessão do cinema, em relação ao preço do ingresso. Lembre-se de que a receita é o produto do preço do ingresso pelo número de pagantes.
b) Determine o preço do ingresso que fornece o lucro máximo.

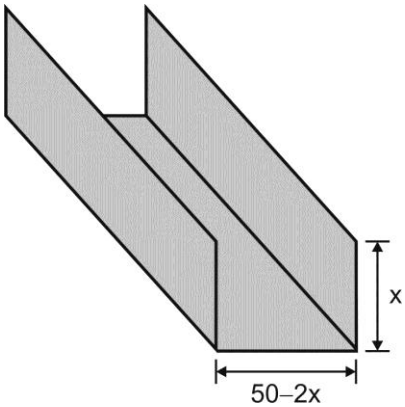
5. Quando um paciente ingere comprimidos de um certo remédio, a concentração da droga na corrente sanguínea (em mg/l), após t minutos do momento da ingestão, é aproximada por

$$C(t) = 0{,}06t - 0{,}0002t^2$$

em que $0 \leq t \leq 240$. Determine o instante em que a concentração é máxima e o valor dessa concentração (Stewart).

6. Para produzir calhas, um fabricante dobra uma folha de metal com 50 cm de largura, como mostra a figura.

a) Determine a função $A(x)$ que fornece a área da seção transversal da calha em relação a x.
b) Determine o valor de x que maximiza a área da seção transversal da calha.



7. Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem. Supondo que x denota o número de homens do grupo, determine esse valor.

8. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição, e definindo a receita do restaurante como o produto do preço pela quantidade de comida vendida.

a) Exprima o preço do quilo, em função de x.
b) Exprima a quantidade de comida vendida, em função de x.
c) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita do restaurante em relação a x.
d) Determine o valor de x que maximiza a receita do restaurante.

9. Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela função

$$n(p) = 115 - 0{,}25p,$$

em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais).

a) Escreva uma função que fornece a receita bruta da empresa com a venda do novo modelo de aparelhos, dada pelo produto entre o número de aparelhos vendidos e o preço de cada telefone.
b) Determine o preço p que maximiza a receita bruta da empresa.

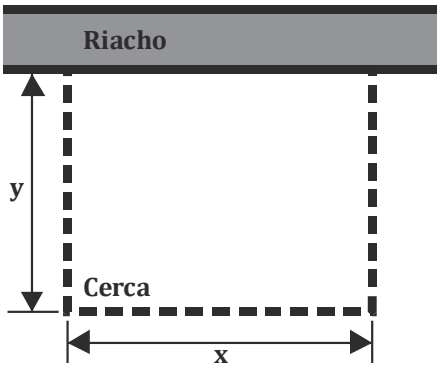
10. Jogando em seu estádio, um clube de futebol consegue vender 10.000 ingressos por partida, se cobra R$ 10,00 por ingresso. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de redução do preço do ingresso, o clube ganha 2000 novos espectadores em uma partida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser reduzida do valor atualmente cobrado pelo ingresso.

a) Exprima o preço do ingresso em função de x.
b) Exprima a quantidade de ingressos vendidos (por partida) em função de x.

c) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita de uma partida, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço pela quantidade de ingressos vendidos.

d) Determine o valor de x que maximiza a receita do clube em um jogo.

11. Um fazendeiro pretende usar 500 m de cerca para proteger um bosque retangular às margens de um riacho, como mostra a figura abaixo. Repare que apenas três dos lados da região do bosque precisam ser cercados.



a) Usando o comprimento da cerca, escreva o valor de y em função de x.

b) Com base na expressão que você encontrou no item (a), escreva a função A(x) que fornece a área cercada, com relação a x.

c) Determine o valor de x que maximiza a área cercada. Determine também o valor de y e a área máxima que pode ser cercada.

d) Trace o gráfico de $A(x)$.

12. Calcule o quociente e o resto.

a) $\frac{2x^3-3x^2+6}{x^2-2}$.

b) $\frac{6x^2-4x-3}{3x-5}$.

c) $\frac{x^4+2x-12}{x+2}$.

d) $\frac{4x^3+2x^2+11x}{2x^2+3}$.

e) $\frac{6x^4+5x^3-2x}{3x-2}$.

f) $\frac{3x^2+2x-5}{x-2}$.

g) $\frac{4x^4+6x^3-8x^2+22x-24}{x+3}$.

h) $\frac{4x^3+6x-10}{2x-4}$.

13. Em cada caso abaixo, escreva na forma expandida um polinômio que tenha o grau e as raízes indicadas.

a) Polinômio de grau 2 com raízes –4 e 0.

b) Polinômio de grau 2 com raízes 1/2 e 2, com concavidade para baixo.

c) Polinômio de grau 3 com raízes 0, 1 e 3.

d) Polinômio de grau 3 com raízes –2 e 1 (com multiplicidade 2).

e) Polinômio de grau 4 com raízes –3, –2, 0 e 5.

f) Polinômio de grau 4 com raízes –1, 4 e 2 (com multiplicidade 2).

14. Determine as raízes das equações e escreva os polinômios na forma fatorada.

a) $-3x(x^2-2x-3)=0$.

b) $x^4-x^3-20x^2=0$.

c) $x^3+x^2-2x-2=0$, sabendo que $x=-1$ é uma raiz.

d) $x^3-5x^2-4x+20=0$, sabendo que $x=2$ é uma raiz.

e) $x^4-9x^3-x^2+81x-72=0$, sabendo que $x=8$ e $x=3$ são raízes.

15. Resolva as desigualdades abaixo:

a) $(x-2)(x-4)\geq 0$.

b) $(x+1)(x-3)\leq 0$.

c) $(2x-1)x\geq 0$.

d) $2x(x-1/4)\leq 0$.

e) $x^2\leq 9$.

f) $-x^2\leq -5$.

g) $x^2+6x\leq 0$.

h) $3x^2-5x\geq 0$.

i) $x^2+x\leq 12$.

j) $2x^2\geq 20-6x$.

k) $x^2+9x+18\leq 0$.

l) $3x^2-16x+5\geq 0$.

m) $(x-1)(x+2)(x-4)\leq 0$.

n) $(x+1)(x-2)x\geq 0$.

o) $x^3-2x\geq 0$.

p) $2x^3-18x\leq 0$.

q) $\frac{x-2}{x+3}\leq 0$.

r) $\frac{x+4}{x-2}\leq 0$.

s) $\frac{2x-3}{x-1}\leq 0$.

t) $\frac{4x+5}{x+2}\leq 0$.

u) $\frac{x-3}{2x+6} \leq 0$.

v) $\frac{x+1}{2x-5} \leq 0$.

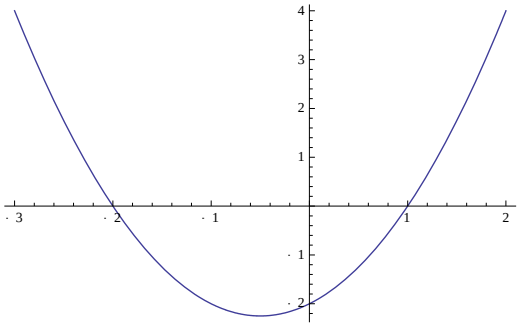
w) $3 - \frac{x}{x+2} \leq 0$.

x) $\frac{5x}{x-4} \geq 10$.

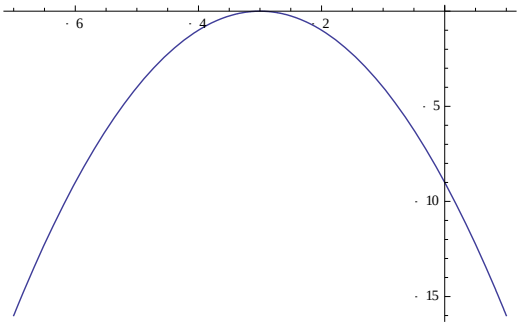
y) $\frac{2x-7}{x-2} \geq 3$.

Respostas.

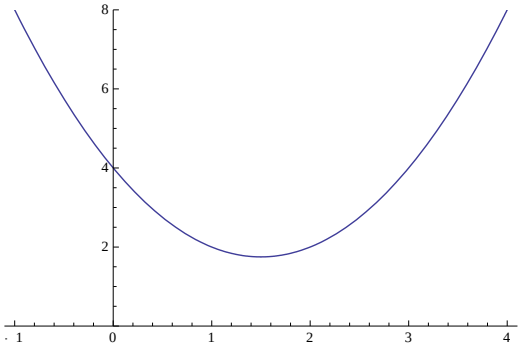
1.a. Mínimo em $x = -1/2$. Gráfico:



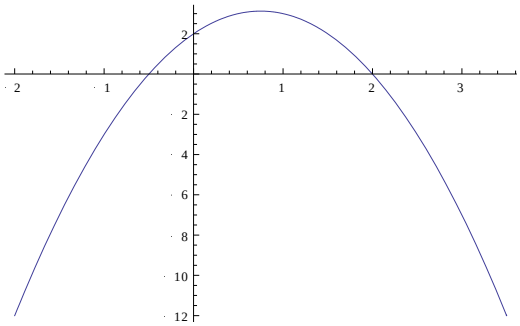
1.b. Máximo em $x = -3$. Gráfico:



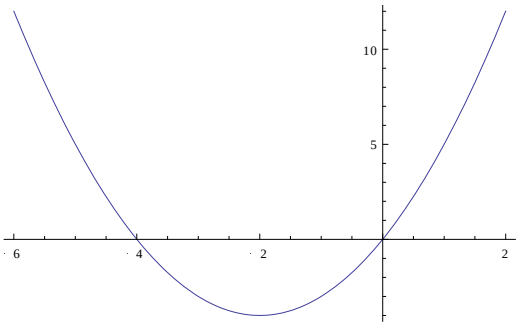
1.c. Mínimo em $x = 1{,}5$. Gráfico:



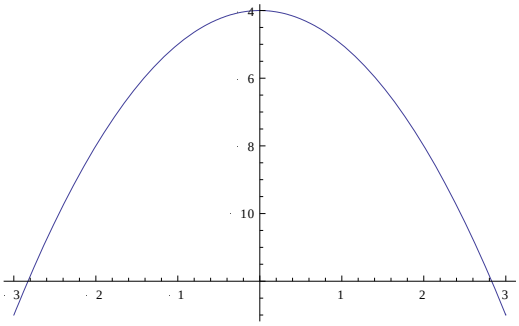
1.d. Máximo em $x = 3/4$.Gráfico:



1.e. Mínimo em $x = -2$. Gráfico:



1.f. Máximo em $x = 0$. Gráfico:



2.a. Mínimos locais: $x = 1{,}8$ e $x = 6{,}2$.

Máximo local: $x = 2$.

2.b. Mínimos locais: $x = -0{,}5$ e $x = 1{,}3$.

Máximo local: $x = -1{,}6$ e $x = 0{,}5$.

2.c. Mínimo local: $x = 0{,}6$. Máximo local: $x = -0{,}6$.

2.d. Mínimo local: não há. Máximo local: $x = 2{,}2$.

3.a. 1,1 m.

3.b. 5 m.

3.c. 11 m.

4.a. $R(x) = (20 - x)(300 + 20x)$.

4.b. R$ 17,50.

5. t = 150 min. C(150) = 4,5 mg/l.

6.a. $A(x) = x(50 - 2x)$.

6.b. 12,5 cm

7. O grupo tem 15 homens e 25 mulheres.

8.a. $P(x) = 15 + x$.

8.b. $Q(x) = 100 - 5x$.

8.c. $R(x) = (15 + x)(100 - 5x)$.

8.d. R$ 17,50.

9.a. $R(p) = p \cdot n(p) = 115p - 0{,}25p^2$.

9.b. R$ 230,00.

10.a. $p(x) = 10 - x$.

10.b. $q(x) = 10000 + 2000x$.

10.c. $R(x) = -2000x^2 + 10000x + 100000$.

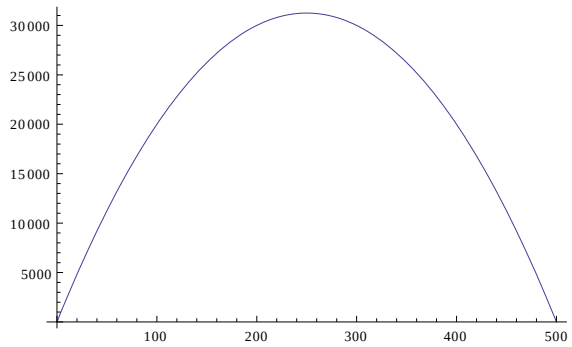
10.d. $x = 2{,}5$.

11.a. $y = (500 - x)/2$.

11.b. $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 250x$.

11.c. $x = 250\ m, y = 125\ m,\ A = 31250\ m^2$.

11.d.



12.a. Quociente: $2x - 3$. Resto: $4x$.

12.b. Quociente: $2x + 2$. Resto: 7.

12.c. Quociente: $x^3 - 2x^2 + 4x - 6$. Resto: 0.

12.d. Quociente: $2x + 1$. Resto: $5x - 3$.

12.e. Quociente: $2x^3 + 3x^2 + 2x + 2/3$. Resto: $4/3$.

12.f. Quociente: $3x + 8$. Resto: 11.

12.g. Quociente: $4x^3 - 6x^2 + 10x - 8$. Resto: 0.

12.h. Quociente: $2x^2 + 4x + 11$. Resto: 34.

13.a. $x^2 + 4x$.

13.b. $-x^2 + \frac{5}{2}x - 1$.

13.c. $x^3 - 4x^2 + 3x$.

13.d. $x^3 - 3x + 2$.

13.e. $x^4 - 19x^2 - 30x$.

13.f. $x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16$.

14.a. Polinômio: $-3x(x - 3)(x + 1)$.
Raízes: 0, 3 e -1.

14.b. Polinômio: $x^2(x - 5)(x + 4)$.
Raízes: 5, -4 e 0 (com multiplicidade 2).

14.c. Polinômio: $(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
Raízes: -1, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

14.d. Polinômio: $(x - 1)(x - 2)(x - 8)$.
Raízes: 1, 2 e 8.

14.e. Polinômio: $(x + 3)(x - 1)(x - 3)(x - 8)$.
Raízes: -3, 1, 3 e 8.

15.a. $x \leq 2$ ou $x \geq 4$.

15.b. $-1 \leq x \leq 3$.

15.c. $x \leq 0$ ou $x \geq 1/2$.

15.d. $0 \leq x \leq 1/4$.

15.e. $-3 \leq x \leq 3$.

15.f. $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$.

15.g. $-6 \leq x \leq 0$.

15.h. $x \leq 0$ ou $x \geq 5/3$.

15.i. $-4 \leq x \leq 3$.

15.j. $x \leq -5$ ou $x \geq 2$.

15.k. $-6 \leq x \leq -3$.

15.l. $x \leq 1/3$ ou $x \geq 5$.

15.m. $x \leq -2$ ou $1 \leq x \leq 4$.

15.n. $-1 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 2$.

15.o. $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ ou $x \geq 2$.

15.p. $x \leq -3$ ou $0 \leq x \leq 3$.

15.q. $-3 < x \leq 2$.

15.r. $-4 \leq x < 2$.

15.s. $1 < x \leq 3/2$.

15.t. $-2 < x \leq -5/4$.

15.u. $-3 < x \leq 3$.

15.v. $-1 \leq x < 5/2$.

15.w. $-3 \leq x < -2$.

15.x. $4 < x \leq 8$.

15.y. $-1 \leq x < 2$.