

Ensaio do Método de Elementos Finitos com Integral Fuzzy

Daniel Ibanez¹, Luana Bassani¹, Laecio Barros¹, and Estevão Laureano¹

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, CEP 13083-859, Campinas, SP, Brasil
{daniel, laeciocb, eelaureano}@ime.unicamp.br
lbassani@ime.usp.br

Resumo Nessa proposta desenvolveu-se uma adaptação da integração numérica no método de elementos finitos (MEF) de Galerkin para obter uma solução aproximada de um problema de valor de contorno (PVC) com a inserção de uma integral fuzzy. A integral fuzzy de Sugeno trata de uma ferramenta da teoria da medida fuzzy e é considerada uma boa aproximação para a integral de Riemann (utilizada no MEF). Com efeito, foram obtidas soluções aproximadas do PVC e comparados os resultados, utilizando a integral de Riemann e a integral de Sugeno, respectivamente.

Keywords: Problema de valor de contorno, método de elementos finitos de Galerkin, integral fuzzy de Sugeno.

1 Introdução

O método de elementos finitos (MEF) é utilizado em diversas aplicações, as quais incluem problemas de valor de contorno [1].

Nessa proposta, objetivou-se elaborar uma adaptação da integração numérica no MEF, para obter uma solução aproximada de um PVC. De fato, propõe-se uma modificação na integração requerida no MEF, de forma a substituir a integral de Riemann pela integral de Sugeno.

Quando criada em meados da década de 70, a integral de Sugeno recebeu a denominação de integral fuzzy [2]. A justificativa para sua inserção na resolução numérica do MEF se resume no fato de que a integral de Sugeno é uma ferramenta da teoria integral fuzzy de cálculo simplificado, uma vez que envolve apenas o cálculo de supremo e de mínimos [3].

2 Fundamentação Teórica

Considere o problema de valor de contorno (PVC), com condições de Dirichlet homogêneas, linear e unidimensional, com $u = u(x)$ tal que

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

Para resolver (1) com MEF de Galerkin, de forma tradicional, multiplica-se a equação diferencial, do problema, por uma função teste do espaço V_0 (espaço de Hilbert, que considera as condições de contorno específicas do PVC (1) [1]), definido como

$$V_0 = H_0^1(0, 1) = \left\{ v(x) : \int_0^1 (v(x)^2 + v'(x)^2) dx < \infty, v(0) = v(1) = 0 \right\}, \quad (2)$$

e integra-se por partes sobre $[0, 1]$. Assim, deve-se encontrar $u \in V_0$ tal que

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x))v(x) dx = 0, \quad \forall v \in V_0. \quad (3)$$

Logo, integrando por partes, e uma vez que $v \in V_0$, obtém-se a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u''(x)v(x) dx &= \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - [u'(x)v(x)]_0^1 \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Dessa forma, obtém-se a formulação variacional [1] do problema (1), que é encontrar $u \in V_0$ que satisfaz

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V_0. \quad (5)$$

Resolver o PVC (1) é equivalente a resolver um problema em uma formulação variacional (5) [1].

Desde que u pertence a V_0 (sendo V_0 um espaço de dimensão infinita), deseja-se construir uma solução aproximada u_h [4], em um espaço de dimensão finita (V_h^0). Para tal fim, considera-se a partição

$$\tau_h : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = 1,$$

do intervalo $[0, 1]$ em subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, com comprimento $|I_i| = h_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Agora, pode-se definir o espaço da solução aproximada, o espaço de elementos finitos [4]:

$$V_h^0 := \{v_h : v_h \text{ é função linear por partes e contínua sobre } \tau_h, v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Logo, considerando uma partição homogênea, isto é, para $h = h_i$, introduz-se as funções de base lineares (ver Fig. 1) $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ [4],

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (6)$$

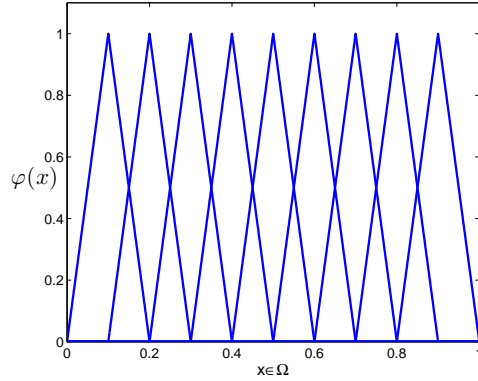


Figura 1. Gráfico de funções de base.

Assim, a formulação de elementos finitos (formulação variacional discreta) consiste em encontrar $u_h \in V_h^0 [1]$, tal que

$$\int_0^1 u_h'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V_h^0. \quad (7)$$

Agora, deseja-se determinar $u_h \in V_h^0$. A partir das funções de base φ_j do espaço V_h^0 , pode-se inferir que u_h é combinação linear das funções φ_j , com coeficientes constantes ξ_j , ou seja,

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j(x), \quad u_h'(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j'(x). \quad (8)$$

Portanto, desde que $u_h(x)$ é uma aproximação de $u(x)$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^m \xi_j \left(\int_0^1 \varphi_j'(x)v'(x)dx \right) = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V_h^0. \quad (9)$$

Dado que $v \in V_h^0$, escolhe-se $v(x) = \varphi_i(x)$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Logo, para encontrar ξ_j , com $j = 1, 2, \dots, m$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx \right) \xi_j = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (10)$$

cuja representação por meio da notação de produto interno é da forma

$$\sum_{j=1}^m (\varphi_j', \varphi_i') \xi_j = (f, \varphi_i). \quad (11)$$

Isto resulta em um problema discreto, representado por um sistema linear de equações, que em forma matricial se representa por $A\xi = b$, com a denominada matriz de rigidez [1] composta por

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^m, \text{ com } a_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx, \text{ e } A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (12)$$

seguida do vetor $\xi = [\xi_j]_{j=1}^m$, e o vetor de carga $b = [b_i]_{i=1}^m$, com

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \text{ e } \xi, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}. \quad (13)$$

Então, na resolução do sistema $A\xi = b$, da forma usual, deve-se obter os valores das integrais apresentadas.

Logo, ao utilizar as funções de base, com φ' definida como

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{-1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (14)$$

obtêm-se os coeficientes da matriz de rigidez A , para $j = i$,

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h} \cdot \frac{-1}{h} dx \\ &= \frac{x_i - x_{i-1}}{h^2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{h^2} = \frac{h}{h^2} + \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (15)$$

e para $j = i - 1$,

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x)dx \\ &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} 0 \cdot \frac{1}{h} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \cdot \frac{-1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h} \cdot 0 dx \\ &= -\frac{x_i - x_{i-1}}{h^2} = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h}, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (16)$$

Logo, por simetria tem-se que $a_{i-1,i} = a_{i,i-1}$.

Finalmente, pela composição da base utilizada, conclui-se que para $|i - j| > 1 \Rightarrow a_{ij} = 0$, pois da forma como foi definido, sempre se verifica $(\varphi'_i, \varphi'_j) = 0$.

Assim, resulta que a matriz de rigidez tem a forma

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Além disso, o vetor de carga b tem coordenadas

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Supondo que $f(x_i)$ seja uma aproximação constante por partes de f em cada elemento I_i da partição τ_h , pode-se obter, explicitamente, o vetor b , com o uso da aproximação de Taylor para $f_{i+1} = f_i + \mathcal{O}(h)$, em funções suficientemente suaves, como

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx = \frac{f_i}{2}h + \frac{f_{i+1}}{2}h = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \approx \frac{h}{2}(f_i + f_i) = hf_i. \quad (19)$$

Assim, a configuração final do sistema matricial, é da forma

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{m-1} \\ \xi_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = h \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Dessa forma, o sistema $A\xi = b$ (20) tem solução única, uma vez que A se trata de uma matriz tridiagonal, simétrica e definida positiva, o que a torna não singular. Um fato a ressaltar é que a solução procurada, a solução aproximada u_h de (5), dependerá, fortemente, da função f do problema (1). Assim, a resolução do sistema $A\xi = b$ encerra o procedimento tradicional da resolução do PVC via MEF [1].

3 Metodologia

Inicialmente, desenvolveu-se o MEF de Galerkin, de modo a validar a inserção da Integral de Sugeno (a descrever na seção a seguir) no MEF para resolver aproximadamente o PVC dado em (1).

Logo, comparou-se a solução obtida ao inserir a integral de Sugeno na adaptação da integração numérica do MEF de Galerkin e a solução obtida com o MEF de Galerkin utilizando a integral de Riemann.

4 Descrição e Análise dos Resultados

4.1 Integral de Sugeno

A fim de buscar introduzir aspectos da teoria de conjuntos fuzzy neste trabalho, foi utilizada a integral de Sugeno para o cálculo das integrais, em todos os elementos da matriz de rigidez A e do vetor de carga b , definida para uma função $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$, com μ uma medida fuzzy sobre $\Omega = [0, 1]$, como

$$\oint_{\Omega} \rho d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge H(\alpha)], \quad (21)$$

em que $H(\alpha) = \mu\{\omega \in \Omega : \rho(\omega) \geq \alpha\}$ é denominada a função nível de ρ [2]. Nesse caso, utilizou-se a medida usual $\mu = m([\rho]^\alpha) = \rho_2^\alpha - \rho_1^\alpha$, que é uma medida fuzzy, e $[\rho]^\alpha = [\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha]$, que são os α -níveis de ρ .

Com efeito, observa-se em [2] que a integral de Sugeno de ρ coincide com o ponto fixo de H , se este existir (ver Fig. 2a), ou seja:

$$\oint_{\Omega} \rho d\mu = \bar{\alpha} = H(\bar{\alpha}). \quad (22)$$

Ainda, por [5], o valor ($\bar{\alpha}$) da integral de Sugeno pode ser interpretado geometricamente como a magnitude do lado do maior quadrado inscrito entre a função, a integrar, e o eixo X (ver Fig. 2b).

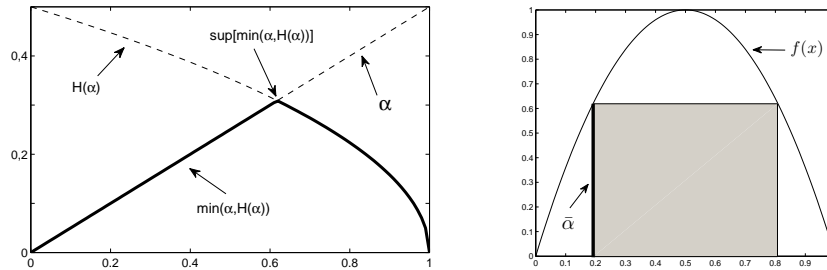


Figura 2. Integral de Sugeno: (2.a) valor no ponto fixo de H e (2.b) interpretação geométrica.

4.2 Análise de Resultados

Como já dito anteriormente, a integral de Sugeno foi utilizada em vez da integral de Riemman, para obter todos os elementos do sistema matricial em (20).

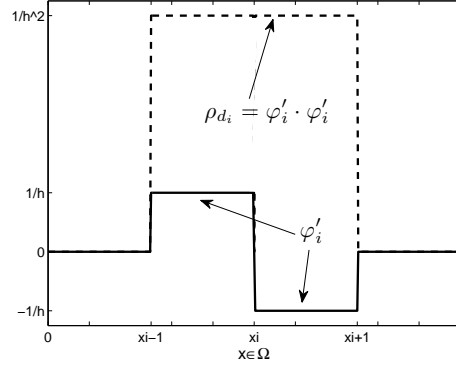


Figura 3. Gráfico para o produto entre funções φ'_i .

Inicialmente, analisou-se a matriz de rigidez A . Para os elementos da diagonal principal, em que $j = i$, o produto entre as funções $\varphi'_i \cdot \varphi'_i = \frac{1}{h^2} := \rho_{d_i}$ é um valor constante, sendo este um número inteiro positivo (ver Fig. 3), já que, na discretização do domínio, temos que $h = \frac{1}{m+1}$.

Observa-se que o valor ρ_{d_i} (dentro da integral), constante, assume um valor $\frac{1}{h^2} > 1$, dado a que $0 < h \leq 1/2$ (sendo $h = 1/2$ a mínima partição homogênea possível para Ω), fora do contradomínio $[0, 1]$ necessário para computar a integral de Sugeno, segundo a definição apresentada em (21).

Dessa forma, faz-se necessário utilizar uma extensão da seguinte propriedade da integral de Sugeno, definida para funções constantes $f(x) = k$, com $0 \leq k \leq 1$, em [2], como:

$$\oint_{\Omega} k d\mu = k \wedge \mu(\Omega). \quad (23)$$

Assim, uma vez que $\rho_{d_i} > 1$, podemos interpretar geometricamente que para cada inteiro positivo maior que 1, é repetida $\frac{1}{h^2}$ vezes a integração equivalente para uma constante unitária ($k = 1$).

Logo, lembrando que se pretende estabelecer a integração para o elemento a_{ii} , cujo domínio é limitado nos intervalos I_i e I_{i+1} . Então, para $k = 1$, tem-se $[1]^\alpha = \{x \in [I_i, I_{i+1}] : 1 \geq \alpha\} = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, obtendo uma medida $\mu = m([1]^\alpha) = x_{i+1} - x_{i-1} = 2h = H_{d_i}(\alpha)$.

Portanto, na diagonal principal da matriz A , para $x \in [I_i, I_{i+1}] = I$, tem-se

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 (\varphi'_i \cdot \varphi'_i) dx \cong \oint_I \rho_{d_i} d\mu = \frac{1}{h^2} \left(\oint_I 1 d\mu \right) \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge H_{d_i}(\alpha)] \right) = \frac{1}{h^2} \left(\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge 2h] \right) = \frac{2}{h}. \end{aligned} \quad (24)$$

Continuando, para os elementos abaixo da diagonal principal tal que $j = i-1$, $\forall i = 2, 3, \dots, m$, o produto $\varphi'_i \cdot \varphi'_{i-1} = -1/h^2 := \rho_{d_{i-1}}$ é um valor constante,

sendo este um número inteiro negativo. Todavia, semelhante ao caso anterior, o valor $\rho_{d_{i-1}} < 1$ (dentro da integral) não pertence ao intervalo do contradomínio $[0, 1]$, necessário no cômputo da integral de Sugeno. Novamente, pode-se utilizar uma extensão da propriedade de integração para uma constante, interpretada geometricamente, onde para cada inteiro negativo menor que -1 , é repetida $\frac{1}{h^2}$ vezes a integração equivalente para uma constante unitária ($k = 1$), resguardando o sinal de menos (a área entre a função constante $k = -1$ e o eixo X é equivalente à área entre a função constante $k = 1$ e o eixo X).

Por fim, ao considerar a integração para o elemento $a_{i,i-1}$, destaca-se que o domínio é limitado só para o intervalo I_i . Então, para $k = 1$, tem-se $[1]^\alpha = \{x \in [I_i] : 1 \geq \alpha\} = [x_{i-1}, x_i]$, obtendo uma medida $\mu = m([1]^\alpha) = x_i - x_{i-1} = h = H_{d_{i-1}}(\alpha)$.

Logo, nota-se que para as diagonais acima e abaixo da diagonal principal, por simetria, tem-se que $a_{i,i-1} = a_{i-1,i}$, $\forall i = 2, 3, \dots, m$, e assim

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= a_{i-1,i} = \int_0^1 (\varphi'_i \cdot \varphi'_{i-1}) dx \cong \frac{-1}{h^2} \left(\oint_{I_i} 1 d\mu \right) \\ &= \frac{-1}{h^2} \left(\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge H_{d_{i-1}}(\alpha)] \right) = \frac{-1}{h^2} \left(\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge h] \right) = \frac{-1}{h}. \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, pela composição da base utilizada, conclui-se que para $|i-j| > 1$, tem-se $a_{ij} = 0$, já que $(\varphi'_i, \varphi'_j) = 0$ e então $\oint_{\Omega} 0 d\mu = 0 \wedge \mu(\Omega) = 0$.

Por fim, no vetor de carga, a função $f(x)$ será representada, tal como em MEF tradicional, por uma aproximação constante $f(x_i) = f_i$ em $x \in [I_i, I_{i+1}]$, para o produto $f \cdot \varphi_i = \rho_{b_i}$.

Cabe destacar aqui, que a função resultante ρ_{b_i} terá uma forma triangular, já que as funções de base têm forma triangular e são multiplicadas por uma constante, mas que não representará, geralmente, um número triangular fuzzy (ver Fig. 4). Isso se deve ao fato de que se $f_i > 1$, a função ρ_{b_i} não seria um subconjunto fuzzy (contradomínio fora do intervalo $[0, 1]$) e se $f_i < 1$ a função ρ_{b_i} não seria um número fuzzy (não satisfaz que todos os α -níveis sejam não vazios).

Ignorando as limitações mencionadas anteriormente, foram estabelecidos os α -níveis da função ρ_{b_i} como $[\rho_{b_i}]^\alpha = \{x \in I = [I_{i-1}, I_i] : \rho_{b_i} \geq \alpha\} = \left[\frac{\alpha h}{f_i} + x_{i-1}, \frac{-\alpha h}{f_i} + x_{i+1} \right]$, obtendo uma medida $\mu = m([\rho_{b_i}]^\alpha) = 2h - \frac{2\alpha h}{f_i} = H_{b_i}(\alpha)$.

Assim, o vetor de cargas, no cálculo com a integral de Sugeno, resulta em

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \cong \oint_I \rho_{b_i} d\mu = \left(\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge H_{b_i}(\alpha)] \right) = \frac{2hf_i}{f_i + 2h}. \quad (26)$$

Contudo, na resolução via introdução de ferramentas fuzzy em MEF, obtém-se os valores da matriz A e do vetor b , o que produz um sistema (diferente no vetor de carga com a forma tradicional do MEF de Galerkin) que resolve aproximadamente o PVC. A fim de visualizar uma resolução numérico-computacional,

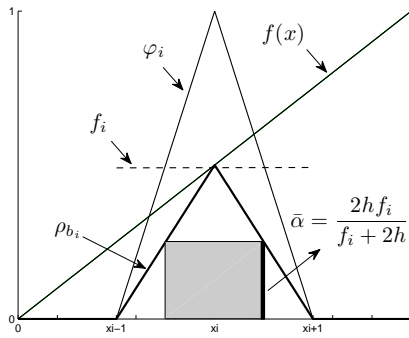


Figura 4. Gráfico do produto entre f_i e φ_i .

aproximada do PVC (1), considerou-se a função de carga $f(x) = x$. Dessa forma, tem-se que a solução analítica que satisfaz as condições de contorno, é dada pela função $u(x) = -\frac{x}{6}(x^2 - 1)$. Em Fig. 5a e Fig. 5b, ilustra-se a solução analítica, $u(x)$, desde que $f(x) = x$, bem como as aproximações obtidas pela combinação fuzzy-MEF para duas subdivisões do domínio $[0, 1]$.

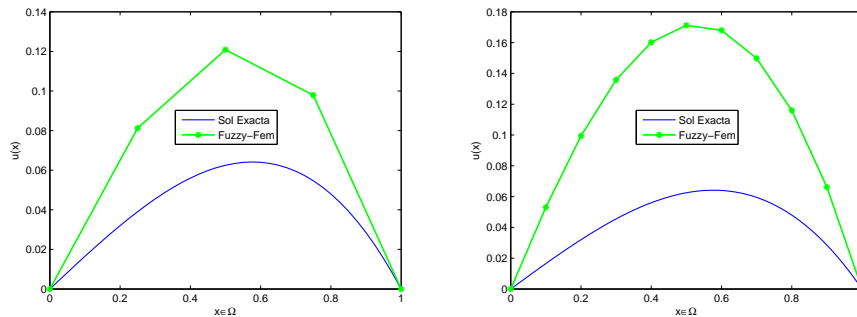


Figura 5. (5.a) Gráfico da solução analítica e da solução fuzzy-MEF, para $n = 3$ e (5.b) Gráfico da solução analítica e da solução fuzzy-MEF, para $n = 9$.

5 Considerações Finais

Foi possível inserir a ferramenta fuzzy da integral de Sugeno na integração numérica no MEF de Galerkin. Com isso, encontrou-se resultados idênticos entre os elementos da matriz A do sistema do MEF de Galerkin, calculado com integrais de Riemann, e a adaptação apresentada com integrais de Sugeno. Contudo,

não foi obtido o mesmo resultado quando comparados os elementos no vetor de carga b . Assim, os sistemas não são iguais, portanto, as soluções aproximadas obtidas não foram equivalentes.

Observou-se defeitos na inserção da integral de Sugeno quando foram estudadas funções, a integrar, que não eram números fuzzy (o caso dos valores obtidos no vetor de carga b), ou seja, para funções que não pertencem estritamente ao contradomínio $[0, 1]$ e/ou cujos α -níveis não satisfazem a condição de que sejam intervalos não vazios. Assim, também não foi possível interpretar as funções de base como números fuzzy triangulares, já que as suas derivadas (clássicas) já não são mais números fuzzy. Ao integrar essas constantes, a dificuldade foi contornada a partir da interpretação geométrica da integral de Sugeno, como a magnitude do lado do maior quadrado inscrito entre a função a integrar e o eixo X .

Com a continuação da pesquisa, pretende-se estudar propriedades de extensão da aplicação da integral de Sugeno ou modificações adaptativas baseadas nesse tipo de integração, para assim, buscar soluções às limitações observadas nas funções que não satisfazem ser um número fuzzy.

Por fim, cabe mencionar que, em MEF de Galerkin tradicional, torna-se necessário calcular as integrais que forneceram os elementos da matriz de rigidez e do vetor de carga, num sistema estabelecido, para a resolução aproximada de algum PVC. Esta tarefa, classicamente, pode ser realizada com integração numérica. Assim, a inserção do ferramental fuzzy pretendeu influir diretamente na obtenção das integrais (que fornecem os elementos da matriz de rigidez e do vetor de carga), e gerar resultados similares aos obtidos no desenvolvimento do MEF tradicional. Contudo, nota-se que é possível a introdução da integral de Sugeno (sob certas condições mencionadas e com algumas limitações evidenciadas), que usa o valor supremo (máximo para caso discreto) e o mínimo, o qual possibilita obter uma simplificação de cálculos, especialmente quando houver funções mais complexas.

Referências

1. Asadzadeh, M.: An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations (2014)
2. Barros, L.C., Bassanezi, R.C.: Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. Campinas, SP: Unicamp (2010)
3. Pedrycz, W., Gomide, F.: Fuzzy systems engineering toward human-centric Computing. Hoboken, NJ, EUA: IEEE Press/John Wiley & Sons (2007)
4. Li, J., Chen, Y.: Computational Partial Differential Equations Using MATLAB. Taylor & Francis Group, CRC Press, (2008)
5. Arenas-Díaz G., Ramírez-Lamus E. R.: Medidas difusas e integrales difusas. Universitas Scientiarum, vol. 18 (1): 7-32, (2013)