Produto de Kronecker para Matrizes Intervalares

Rudhero M. dos Santos, Gildson Q. de Jesus, and Eduardo S. Palmeira

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
espalmeira@uesc.br,
{rudhero,gildsonj}@gmail.com

Resumo Nas últimas três décadas o lugar dos intervalos compactos como objetos independentes tem crescido continuamente na análise numérica, na verificação ou determinação de soluções de vários problemas matemáticos ou na prova de que tais problemas não possuem solução em um domínio particular. Observamos aplicações em diversas áreas tais como problemas em engenharias, robótica, controle etc. Em especial, no presente artigo, usamos noções da matemática intervalar para provar um lema com algumas propriedades do produto de Kronecker, sendo que este é basicamente aplicado na resolução de equações matriciais a exemplo da equação de Lyapunov $P = FPA + Q$.

Keywords: Matrizes Intervalares, Produto de Kronecker, Modelagem Computacional

1 Introdução

A matemática intervalar é uma área relativamente nova que vem se desenvolvendo ao longo dos anos. Os primeiros textos que discorrem sobre tal tema datam da década de 50 tais como [8]. Na aritmética intervalar introduzida por [8] e [3] o conjunto dos intervalos reais, denotado por $I(\mathbb{R})$, provê as operações binárias de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como operações unárias. Entretanto essa aritmética não é, em muitos casos, razoável visto que $I(\mathbb{R})$ munido desses operadores não possui estrutura de corpo, fazendo com que muitas propriedades interessantes não funcionem nesse conjunto.

Nesse artigo não utilizaremos as definições para subtração e multiplicação tal como na literatura, mas sim uma extensão dos intervalos como o descrito em [2], visto que, com elas, não conseguimos uma estrutura algébrica consistente como acontece com o conjunto dos números reais.

Pensando nisso, tomamos o conjunto M como sendo a união entre os intervalos próprios ($I(\mathbb{R})$) e impróprios ($\overline{I(\mathbb{R})}$) de forma que todos os intervalos em M tenham um inverso aditivo bem como um inverso multiplicativo, os quais na

literatura são denominados de Pseudo Inverso Aditivo e Pseudo Inverso multiplicativo. Dessa forma, definimos a multiplicação intervalar como sendo o produto entre os extremos correspondentes e, com isso, conseguimos mostrar que M é um corpo e o conjunto das matrizes de ordem qualquer com entradas em M é um espaço vetorial sobre M. As definições de corpo e espaço vetorial podem ser consultadas em [7].
No que se refere a aplicação, especialmente do ponto de vista matemático, pode-se citar problemas intervalares associados à solução de sistemas lineares ou não lineares, otimização (restrita ou global), determinação de valores e vetores próprios, solução de problemas de contorno e de equações diferenciais, entre outros. Isto foi possível através da compreensão de intervalos como extensões de números reais ou complexos, da introdução de funções intervalares e de aritméticas intervalares. Além disso, temos aplicações em áreas como engenharia mecânica, robótica, controle, etc.

Ainda, como é bem conhecido na literatura, a teoria intervalar tem forte ligação com a teoria dos conjuntos fuzzy e em especial com os números fuzzy, através dos alfa cortes. Nesse trabalho buscamos formalizar determinados operadores de matrizes intervalares para servir de base para definirmos operadores num espaço vetorial fuzzy.

Na seção (2) evidenciamos algumas definições e proposições preliminares a cerca da matemática intervalar a exemplo de operações de soma e multiplicação de intervalos e operações entre matrizes intervalares. Tendo em vista a estrutura algébrica construída, na seção (3) provamos algumas propriedades do produto de Kronecker para matrizes intervalares condensadas em um lema e verificamos que, com a multiplicação usual, não se obtém os mesmos resultados. Vale ressaltar que o produto de Kronecker é aplicado na resolução de equações matriciais a exemplo da equação de Lyapunov $P = FPA + Q$, como pode ser visto em [9].

2 Matrizes Intervalares

Nesta seção serão apresentados alguns resultados importantes para o desenvolvimento da teoria do produto de Kronecker para matrizes intervalares.
O conjunto $M = I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})}$, sendo

$$I(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \overline{a}]\,;\, \underline{a} \leq \overline{a}, \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}\} \quad e \quad \overline{I(\mathbb{R})} = \{[\underline{a}, \overline{a}]\,;\, [\overline{a}, \underline{a}] \in I(\mathbb{R})\}\,. \tag{1}$$

Em [1] foi provado que o conjunto M munido com as seguintes operações de soma e multiplicação

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad e \quad [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2]\,. \tag{2}$$

é um corpo, este fato foi provado em [10]. Na proposição a seguir será mostrado que o conjunto das matrizes intervalares $\mathcal{M}^{m \times n}(M)$, ou seja, o conjunto das matrizes cuja as entradas são elementos de M é um espaço vetorial sobre M.

Proposição 21 *Seja $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ o conjunto das matrizes de ordem $m\times n$ com entradas em M. Então, $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ é um espaço vetorial sobre M se, $\forall A,B,C\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ e $k,x\in M$, estiverem definidas as seguintes operações*

$$
\begin{aligned}
(A+B)_{ij} &= \left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]+\left[[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]=\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]+[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]=\left[[\underline{a}_{ij}+\underline{b}_{ij},\overline{a}_{ij}+\overline{b}_{ij}]\right],\\
(k\cdot A)_{ij} &= \left[\underline{k},\overline{k}\right]\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=\left[[\underline{k},\overline{k}][\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=\left[[\underline{k}\underline{a}_{ij},\overline{k}\overline{a}_{ij}]\right], \qquad (3)
\end{aligned}
$$

com $0<i\leq m$ e $0<j\leq n$ e satisfazerem as seguintes propriedades:
(A_1) $A+B=B+A$, $\forall A,B\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_2) $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall A,B,C\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_3) Existe um elemento $0=\left[[\underline{0}_{ij},\overline{0}_{ij}]\right]\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ tal que $A+0=A$, $\forall A\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_4) Existe um elemento $-A=\left[[-\underline{a}_{ij},-\overline{a}_{ij}]\right]\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ tal que $A+(-A)=0$;
(M_1) $(k\cdot x)A=k(x\cdot A)$, $\forall k,x\in M$ e $\forall A\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(M_2) Existe um elemento $1=\left[\underline{1},\overline{1}\right]\in M$ tal que $A\cdot 1=A$, $\forall A\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(D_1) $k(A+B)=kA+kB$, $\forall k\in M$ e $\forall A,B\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(D_2) $(k+x)A=kA+xA$, $\forall k,x\in M$, $\forall A\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$;

Prova: Visto que, tem-se pouco espaço serão provadas apenas as propriedades (A_1) e (M_1), as outras propriedades seguem de maneira análoga. Sejam $A=\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]$, $B=\left[[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]$, $C=\left[[\underline{c}_{ij},\overline{c}_{ij}]\right]$ pertencentes a $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$, e sabendo que M é corpo a prova da propriedade (A_1) é dada a seguir

$$
\begin{aligned}
A+B &= \left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]+\left[[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]=\left[[\underline{a}_{ij}+\underline{b}_{ij},\overline{a}_{ij}+\overline{b}_{ij}]\right]=\left[[\underline{b}_{ij}+\underline{a}_{ij},\overline{b}_{ij}+\overline{a}_{ij}]\right]\\
&= \left[[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]+\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=B+A.
\end{aligned}
$$

Já a propriedade (M_1) é provada como segue

$$
\begin{aligned}
(kx)A &= \left(\left[\underline{k},\overline{k}\right][\underline{x},\overline{x}]\right)\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=\left[(\underline{kx},\overline{k}\overline{x})\right]\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=\left[[(\underline{kx}),(\overline{k}\overline{x})][\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]\\
&= \left[([\underline{k},\overline{k}][\underline{x},\overline{x}])[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]=\left[[\underline{k},\overline{k}]([\underline{x},\overline{x}][\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}])\right]=\left[\underline{k},\overline{k}\right]\left[([\underline{x},\overline{x}][\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}])\right]\\
&= \left[\underline{k},\overline{k}\right]\left([\underline{x},\overline{x}]\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]\right)=k(xA).
\end{aligned}
$$

A seguir, algumas definições sobre a teoria de matrizes intervalares.

Definição 21 *[8] (Produto de Matrizes) Dadas duas matrizes $A\in\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ e $B\in\mathcal{M}^{n\times t}(M)$, a matriz produto $(A\cdot B)_{ij}$ $(0<i\leq m$ e $0<j\leq t)$ é dada por*

$$
(A\cdot B)_{ij}=\left[[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]\right]\left[[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}]\right]=\left[[\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{it}\underline{b}_{tj},\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}]\right].
$$

Definição 22 *[8] (Matriz Identidade) Seja $I\in\mathcal{M}^{n}(M)$. A matriz intervalar I_n é denominada matriz intervalar identidade de ordem n se os seus elementos são dados da seguinte forma $(I)_{ij}=\left[\underline{0},\overline{0}\right]$ se $i\neq j$ e $(I)_{ij}=\left[\underline{1},\overline{1}\right]$ se $i=j$.*

Definição 23 *[8] (Matriz transposta) Seja $A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$. Dizemos que a transposta de A, e denotamos por A^T, é uma matriz $n \times m$ obtida a partir de trocas das linhas por colunas de A, isto é, se $(A)_{ij} = \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]$ então $(A^T)_{ij} = \left[[\underline{a}_{ji}, \overline{a}_{ji}]\right]$.*

Definição 24 *[8] (Matriz Inversa) Sejam $A, B \in \mathcal{M}^n(M)$. Sendo $B = A^{-1}$ a matriz inversa de A, deve então satisfazer $AB = I$. Assim,*

$$\begin{cases} (A\cdot B)_{ij} = [1,1], \ para \ i = j \\ (A\cdot B)_{ij} = [0,0], \ para \ i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} [\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}] = [1,1], \ para \ i = j, \\ [\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}] = [0,0], \ para \ i \neq j \end{cases} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj} = 1, \ para \ i = j, \\ \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj} = 0, \ para \ i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

A proposição a seguir será muito útil para a prova das propriedades do produto de Kronecker.

Proposição 22 *Sejam $U \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$ e $V \in \mathcal{M}^{n\times p}(M)$ e sejam $k = \left[\underline{k}, \overline{k}\right]$, $x = [\underline{x}, \overline{x}] \in M$. Então, $(kU)(xV) = (kx)(UV)$.*

Prova: De fato, usando as definições e propriedades supracitadas, temos que

$$\begin{aligned} (kU)(xV) &= (\left[\underline{k}, \overline{k}\right] \left[[\underline{u}_{ij}, \overline{u}_{ij}]\right])([\underline{x}, \overline{x}] \left[[\underline{v}_{ij}, \overline{v}_{ij}]\right]) = \left[[\underline{k}\underline{u}_{ij}, \overline{k}\overline{u}_{ij}]\right] \left[[\underline{x}\underline{v}_{ij}, \overline{x}\overline{v}_{ij}]\right] \\ &= \left[[\sum_{t=1}^{n} (\underline{k}\underline{u}_{it})(\underline{x}\underline{v}_{tj}), \sum_{t=1}^{n} (\overline{k}\overline{u}_{it})(\overline{x}\overline{v}_{tj})]\right] = \left[\underline{k}\underline{x}, \overline{k}\overline{x}\right] \left[[\sum_{t=1}^{n} \underline{u}_{it}\underline{v}_{tj}, \sum_{t=1}^{n} \overline{u}_{it}\overline{v}_{tj}]\right] \\ &= \left[\underline{k}, \overline{k}\right] [[\underline{x}, \overline{x}]] \left[[\underline{u}_{ij}, \overline{u}_{ij}]\right] \left[[\underline{v}_{ij}, \overline{v}_{ij}]\right] = (kx)(UV). \end{aligned}$$

3 Produto de Kronecker para Matrizes Intervalares

Definição 31 *O produto de Kronecker de A e $B \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$, escrevemos $A \otimes B$, é uma matriz de ordem $mn \times mn$, definida por:*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]\, B & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}]\, B & \ldots & [\underline{a}_{1m}, \overline{a}_{1m}]\, B \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}]\, B & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]\, B & \ldots & [\underline{a}_{2m}, \overline{a}_{2m}]\, B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}]\, B & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}]\, B & \ldots & [\underline{a}_{mm}, \overline{a}_{mm}]\, B \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Lema 31 *Dadas as matrizes* $A \in \mathcal{M}^m(M)$, $B \in \mathcal{M}^n(M)$, $C \in \mathcal{M}^{m\times k}(M)$ *e* $D \in \mathcal{M}^{n\times p}(M)$, *as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.

(ii) *Se* A *e* B *são inversíveis, então* $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

(iii) *Para todas as matrizes* A, B, C *e* $X \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$, *se* $C = AXB$, *então* $vec(C) = (B^T \otimes A)vec(X)$.

Prova: (i) Calculando $(A \otimes C)(B \otimes D)$, usando a Definição (31) e a Proposição (22), obtém-se

$$(A \otimes C)(B \otimes D) =$$
$$\begin{bmatrix} \left[\sum\limits_{t=1}^{m} \underline{a}_{1t}\underline{c}_{t1}, \sum\limits_{t=1}^{m} \overline{a}_{1t}\overline{c}_{t1}\right] \left[[\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{b}_{it}\underline{d}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{b}_{it}\overline{d}_{tj}]\right] & \cdots & \left[\sum\limits_{t=1}^{m} \underline{a}_{1t}\underline{c}_{tk}, \sum\limits_{t=1}^{m} \overline{a}_{1t}\overline{c}_{tk}\right] \left[[\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{b}_{ik}\underline{d}_{kj}, \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{b}_{it}\overline{d}_{tj}]\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\sum\limits_{t=1}^{m} \underline{a}_{mt}\underline{c}_{t1}, \sum\limits_{t=1}^{m} \overline{a}_{1t}\overline{c}_{t1}\right] \left[[\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{b}_{it}\underline{d}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{b}_{it}\overline{d}_{tj}]\right] & \cdots & \left[\sum\limits_{t=1}^{m} \underline{a}_{mt}\underline{c}_{tk}, \sum\limits_{t=1}^{m} \overline{a}_{1t}\overline{c}_{tk}\right] \left[[\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{b}_{ik}\underline{d}_{kj}, \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{b}_{it}\overline{d}_{tj}]\right] \end{bmatrix} \tag{8}$$

Por outro lado, AC e BD são dados por

$$AC = \left[[\sum_{t=1}^{m} \underline{a}_{it}\underline{c}_{tj}, \sum_{t=1}^{m} \overline{a}_{it}\overline{c}_{tj}]\right] \quad e \quad BD = \left[[\sum_{t=1}^{n} \underline{b}_{it}\underline{d}_{tj}, \sum_{t=1}^{n} \overline{b}_{it}\overline{d}_{tj}]\right]. \tag{9}$$

Após alguns cálculos pode-se ver que o produto de Kronecker $AC \otimes BD$ é dado pela mesma representação obtida em (8). (ii) Considerando o item (i), seja $C = A^{-1}$ e $D = B^{-1}$, então $AC = I$ e $BD = I$. Assim,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD = I \otimes I = \begin{bmatrix} [1,1]\,I & [0,0] & \dots & [0,0] \\ [0,0] & [1,1]\,I & \dots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \dots & [1,1]\,I \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Logo, pode-se concluir que a matriz $C \otimes D$ é a matriz inversa de $A \otimes B$ e, portanto, segue o resultado. (iii) Sejam A, B, C e X matrizes de ordem n. Calculando a matriz $C = AXB$, tem-se

$$C = AXB = \begin{bmatrix} \left[\sum\limits_{l=1}^{n} (\underline{b}_{l1} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{1t}\underline{x}_{tl}), \sum\limits_{l=1}^{n} (\overline{b}_{l1} \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{1t}\overline{x}_{tl})\right] & \cdots & \left[\sum\limits_{l=1}^{n} (\underline{b}_{ln} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{1t}\underline{x}_{tl}), \sum\limits_{l=1}^{n} (\overline{b}_{ln} \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{1t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\sum\limits_{l=1}^{n} (\underline{b}_{l1} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{nt}\underline{x}_{tl}), \sum\limits_{l=1}^{n} (\overline{b}_{l1} \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{nt}\overline{x}_{tl})\right] & \cdots & \left[\sum\limits_{l=1}^{n} (\underline{b}_{ln} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{nt}\underline{x}_{tl}), \sum\limits_{l=1}^{n} (\overline{b}_{ln} \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{nt}\overline{x}_{tl})\right] \end{bmatrix} \tag{11}$$

Assim, $vec(C)$ é dado por

$$vec(C) = \begin{bmatrix} \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{1t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{1t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{2t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{2t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \vdots \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{nt}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l1}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{nt}\overline{x}_{tl})\right] \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{1t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{1t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{2t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{2t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \vdots \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{nt}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{l2}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{nt}\overline{x}_{tl})\right] \\ \vdots \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{1t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{1t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{2t}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{2t}\overline{x}_{tl})\right] \\ \vdots \\ \left[\sum_{l=1}^{n}(\underline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\underline{a}_{nt}\underline{x}_{tl}), \sum_{l=1}^{n}(\overline{b}_{ln}\sum_{t=1}^{n}\overline{a}_{nt}\overline{x}_{tl})\right] \end{bmatrix} \tag{12}$$

Por outro lado, calculando $(B^T \otimes A)vec(X)$, tem-se que

$$(B^T \otimes A)vec(X) = \begin{bmatrix} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}]\,[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]] & \cdots & [\underline{b}_{n1}, \overline{b}_{n1}]\,[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}]\,[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]] & \cdots & [\underline{b}_{nn}, \overline{b}_{nn}]\,[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{x}_{11}, \overline{x}_{11}] \\ \vdots \\ [\underline{x}_{n1}, \overline{x}_{n1}] \\ \vdots \\ [\underline{x}_{1n}, \overline{x}_{1n}] \\ \vdots \\ [\underline{x}_{nn}, \overline{x}_{nn}] \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Após alguns cálculos chega-se ao mesmo resultado apresentado em (12). Portanto, concluímos que $vec(C) = (B^T \otimes A)vec(X)$.

Observação 31 *Pode-se notar que o produto de intervalos que foi usado neste trabalho não é o produto de intervalos usual da literatura, dado por*

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}], \tag{14}$$

$\forall\, [a_1, a_2], [b_1, b_2] \in M$. *Verificou-se no decorrer do trabalho que alguns resultados do produto de Kronecker não eram válidos para o produto usual (14), como pode ser visto no Exemplo abaixo*

Exemplo 31 *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} [-1,0] & [2,3] \\ [-3,-1] & [0,1] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} [-1,2] & [1,3] \\ [-2,-1] & [2,4] \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} [-3,0] & [1,2] \\ [1,1] & [0,0] \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} [1,5] & [-5,-3] \\ [3,5] & [2,3] \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Verifiquemos que o item (i) do Lema (31) é satisfeito usando o produto de intervalos usual.

Resolvendo o problema, obtemos o seguinte resultado

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [-69, 105] & [-83, 57] \\ [-48, -118] & [14, 132] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [-20, 40] & [-10, 38] \\ [-40, 20] & [-44, 0] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [-95, 250] & [-127, 140] \\ [-100, 200] & [0, 220] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [-150, 60] & [-84, 78] \\ [-119, 54] & [-132, -7] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (16)$$

e

$$AC \otimes BD = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [-12, 150] & [-48, 84] \\ [-24, 114] & [14, 132] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [-50, 40] & [-28, 16] \\ [-38, 8] & [-44, 0] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [-20, 250] & [-80, 140] \\ [-40, 190] & [0, 220] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [-150, 12] & [-84, 48] \\ [-114, 24] & [-132, -7] \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Logo, o item (i) do lema (31) não é válido para o produto usual.

Observação 32 *Vale salientar, que o produto de intervalos usado neste trabalho (2) é um caso particular do produto usual quando os intervalos são próprios e positivos.*

4 Conclusões

A escolha da definição de multiplicação de intervalos usada neste artigo se deu pelo fato de conseguirmos sistematizar e construir algumas estruturas algébricas úteis que podem ser aplicadas, dentre outras coisas, em propriedades que envolvam matrizes a exemplo do produto de Kronecker. Além disso, vimos que, com o produto intervalar clássico, não obtemos resultados satisfatórios para tais propriedades. Porém, ainda não conseguimos verificar, de forma generalizada, o motivo pelo qual tal definição não é válida nesse contexto. Sendo assim, deixamos como sugestões para trabalhos futuros generalizar esse fato, bem como obter informações sobre determinantes, transformações lineares, auto valores e autovetores em relação ao corpo M.

Agradecimentos

A UESC pela oportunidade concedida em realizar esta pesquisa.

Referências

1. Costa, T. M. and Chalco-Cano, Y. and Lowick,W. A., Generalized interval vector spaces and interval optimization, Information Sciences, 311: 74-85, 2015.
2. E. D. Popov, Extended Interval Arithmetic in IEEE Floating-Point Environment, Interval Computations, 4: 100-129, 1994.
3. Sunaga, T., Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis, RAAG Memoirs, 1958.

4. Hansen, E., Interval Arithmetic in Matrix Computations, Part I, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis, 2(2): 308–320.
5. Hansen, E., Interval Matrices: Singularity and Real Eigenvalues, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis, 30(3): 864-870.
6. Hansen, E., Interval Matrices: Singularity and Real Eigenvalues, SIAM Journal of Numerical Analysis, 30(3): 864-870.
7. Hefez, A. and Fernandes, C. S., Introdução à Álgebra Linear, Coleção PROFMAT, SBM, 2014.
8. Moore, R. E. and Kearfott, R. B. and Colud, M. J., Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009.
9. Kailath, T. and Sayed, A. H. and Hassibi, B., Linear Estimation, Prentice Hall, 2000.
10. Rufino, V. N. and Palmeira, E. S. and de Jesus, G. Q., Influência de Uma Variável Fuzzy no Problema dos Mínimos Quadrados, Anais do Encontro Nacional de Modelagem Computacional (XVIII ENMC), Salvador, Bahia, Brasil, 2015.