Transformações de Matrizes Intervalares

Guilherme P. Andrade, Gildson Q. de Jesus, and Eduardo S. Palmeira

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
gildsonj@gmail.com,
{gpandrade,espalmeira}@uesc.br

Resumo Este trabalho consiste em demonstrar as propriedades de transformações elementares de matrizes, aplicadas à matrizes cujo os elementos são definidos como intervalos, denominadas matrizes intervalares. Nele pôde-se definir as transformações básicas e suas respectivas reversões, além de demonstrar aplicações de matrizes elementares.

Keywords: Matrizes Intervalares, Transformações Elementares, Matrizes Elementares

1 Introdução

O estudo da matemática intervalar tem uma grande relevância no campo da modelagem computacional, pois tenta resolver o problema da propagação de erros cometidos no processamento de dados com arredondamento dada a dificuldade de se representar determinados números reais, além de ser uma boa maneira de fazer um controle e estimativa desses erros através da utilizando um intervalo ao redor do um valor que se pretende representar, possibilitando uma melhor análise dos valores em torno do resultado esperado.

Assim para que se tenha uma matemática intervalar bem fundamentada é necessário investir esforços de pesquisa na direção de verificar e comprovar quais propriedades aritméticas e algébricas dos números reais são válidas no escopo intervalar. Por exemplo, a utilização de matrizes e suas propriedades na modelagem computacional é imprescindível, pois constitui uma ferramenta para resolver e manipular sistema de equações, além de ser altamente aplicável em qualquer linguagem de programação [3]. Por esse motivo, transformar os elementos de uma matriz de números reais em intervalos, expandir as propriedades da matemática intervalar para transformação de matrizes e aplicar as operações intervalares em matrizes, pode determinar uma melhora na análise de resultados.

Outro aspecto importante da teoria intervalar se dá na sua relação direta com os números fuzzy, pois esses números tem sua representação clássica (CRIP) dada em termos de intervalos (i.e. o suporte do número) e portanto, a aritmética intervalar serve de suporte para a computação na aritmética dos números fuzzy.

As operações aritméticas para intervalos foram definidas por [2], denominadas operações clássicas. Utilizando destas definições existentes, pode-se definir as operações de matrizes com elementos intervalares, denominadas matrizes intervalares, sendo necessário definir mudança em algumas operações para se obter o resultado pretendido.

Os resultados objetivados foram, provar e demonstrar que as propriedades de transformação de matrizes com elementos reais se aplicam a matrizes intervalares, aplicando os teoremas e proposições existentes para transformações de matrizes à matrizes intervalares e verificando se o resultado obtido constitui uma operação válida para matrizes intervalares.

2 Matrizes Intervalares

Nesta seção serão apresentados alguns resultados importantes para o desenvolvimento da teoria do produto de Kronecker para matrizes intervalares.
O conjunto $M = I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})}$, sendo

$$I(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \overline{a}]\,;\underline{a} \leq \overline{a}, \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}\} \quad e \quad \overline{I(\mathbb{R})} = \{[\underline{a}, \overline{a}]\,;[\overline{a}, \underline{a}] \in I(\mathbb{R})\}\,. \tag{1}$$

Em [1] foi provado que o conjunto M munido com as seguintes operações de soma e multiplicação

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad e \quad [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2]\,. \tag{2}$$

é um corpo, este fato foi provado em [5]. Na proposição a seguir será mostrado que o conjunto das matrizes intervalares $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$, ou seja, o conjunto das matrizes cuja as entradas são elementos de M é um espaço vetorial sobre M.

Proposição 21 *Seja $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em M. Dizemos que $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$ é um espaço vetorial sobre M se, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$ e $k, x \in M$, estiverem definidas as seguintes operações*

$$\begin{aligned}(A+B)_{ij} &= \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] + \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right] = \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] + [\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right] = \left[[\underline{a}_{ij} + \underline{b}_{ij}, \overline{a}_{ij} + \overline{b}_{ij}]\right],\\ (k \cdot A)_{ij} &= \left[\underline{k}, \overline{k}\right]\left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] = \left[[\underline{k}, \overline{k}][\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] = \left[[\underline{k}\underline{a}_{ij}, \overline{k}\overline{a}_{ij}]\right],\end{aligned} \tag{3}$$

com $0 < i \leq m$ e $0 < j \leq n$ e satisfazerem as seguintes propriedades:
(A_1) $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_3) Existe um elemento $0 = \left[[\underline{0}_{ij}, \overline{0}_{ij}]\right] \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$ tal que $A + 0 = A$, $\forall A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(A_4) Existe um elemento $-A = \left[[-\underline{a}_{ij}, -\overline{a}_{ij}]\right] \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$ tal que $A + (-A) = 0$;
(M_1) $(k \cdot x)A = k(x \cdot A)$, $\forall k, x \in M$ e $\forall A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(M_2) Existe um elemento $1 = \left[\underline{1}, \overline{1}\right] \in M$ tal que $A \cdot 1 = A$, $\forall A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(D_1) $k(A + B) = kA + kB$, $\forall k \in M$ e $\forall A, B \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;
(D_2) $(k + x)A = kA + xA$, $\forall k, x \in M$, $\forall A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$;

Prova: Visto que, tem-se pouco espaço serão provadas apenas as propriedades (A_1) e (M_1), as outras propriedades seguem de maneira análoga. Sejam $A = \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]$, $B = \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right]$, $C = \left[[\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}]\right]$ pertencentes a $\mathcal{M}^{m\times n}(M)$, e sabendo que M é corpo a prova da propriedade (A_1) é dada a seguir

$$\begin{aligned} A + B &= \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] + \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right] = \left[[\underline{a}_{ij} + \underline{b}_{ij}, \overline{a}_{ij} + \overline{b}_{ij}]\right] = \left[[\underline{b}_{ij} + \underline{a}_{ij}, \overline{b}_{ij} + \overline{a}_{ij}]\right] \\ &= \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right] + \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] = B + A. \end{aligned}$$

Já a propriedade (M_1) é provada como segue

$$\begin{aligned} (kx)A &= \left(\left[\underline{k}, \overline{k}\right] [\underline{x}, \overline{x}]\right) \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] = \left[([\underline{k}, \overline{k}][\underline{x}, \overline{x}])[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] \\ &= \left[[\underline{k}, \overline{k}]([\underline{x}, \overline{x}][\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])\right] = \left[\underline{k}, \overline{k}\right] \left[([\underline{x}, \overline{x}][\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}])\right] \\ &= \left[\underline{k}, \overline{k}\right] \left([\underline{x}, \overline{x}] \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]\right) = k(xA). \end{aligned} \tag{4}$$

A seguir, algumas definições sobre a teoria de matrizes intervalares.

Definição 21 *[4] (Produto de Matrizes) Dadas duas matrizes $A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$ e $B \in \mathcal{M}^{n\times t}(M)$, a matriz produto $(A \cdot B)_{ij}$ $(0 < i \leq m$ e $0 < j \leq t)$ é dada por*

$$(A \cdot B)_{ij} = \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right] \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right] = \left[[\sum_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj}, \sum_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}]\right].$$

Definição 22 *[4] (Matriz Identidade) Seja $I \in \mathcal{M}^{n}(M)$. A matriz intervalar I_n é denominada matriz intervalar identidade de ordem n se os seus elementos são dados da seguinte forma $(I)_{ij} = \left[\underline{0}, \overline{0}\right]$ se $i \neq j$ e $(I)_{ij} = \left[\underline{1}, \overline{1}\right]$ se $i = j$.*

Definição 23 *[4] (Matriz transposta) Seja $A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$. Dizemos que a transposta de A, e denotamos por A^T, é uma matriz $n \times m$ obtida a partir de trocas das linhas por colunas de A, isto é, se $(A)_{ij} = \left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]$ então $(A^T)_{ji} = \left[[\underline{a}_{ji}, \overline{a}_{ji}]\right]$.*

Definição 24 *[4] (Matriz Inversa) Sejam $A, B \in \mathcal{M}^{n}(M)$. Sendo $B = A^{-1}$ a matriz inversa de A, deve então satisfazer $AB = I$. Assim,*

$$\begin{cases} (A \cdot B)_{ij} = [1, 1], \text{ para } i = j \\ (A \cdot B)_{ij} = [0, 0], \text{ para } i \neq j \end{cases} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} [\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}] = [1, 1], \text{ para } i = j, \\ [\sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj}, \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj}] = [0, 0], \text{ para } i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj} = 1, \text{ para } i = j, \\ \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{a}_{it}\underline{b}_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n} \overline{a}_{it}\overline{b}_{tj} = 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

3 Transformações Elementares de Matrizes Intervalares

Definição 31 *(Transformações Elementares) Seja* $A \in \mathcal{M}^{mxn}(M)$*, para cada* L_i *com* $1 \le i \le m$*, a i-ésima linha de* A*. Definimos as transformações elementares nas linha da matriz* A *como*
(i) Permutação das linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$*;*
(ii) Multiplicação da linha L_i *por um intervalo constante* $[\underline{c}, \overline{c}] \in M$ *com* $[\underline{c}, \overline{c}] \neq [0, 0]$*:* $L_i \rightarrow [\underline{c}, \overline{c}]\, L_i$*;*
(iii) Substituição da linha L_i *pela adição desta mesma linha com* $[\underline{c}, \overline{c}]$ *vezes uma outra linha* L_j*, onde* $[\underline{c}, \overline{c}] \in M$ *com* $[\underline{c}, \overline{c}] \neq [0, 0]$*:* $L_i \rightarrow L_i + [\underline{c}, \overline{c}]\, L_j$*.*
A matriz obtida de A *aplicando a transformação elementar 'e"é denotada por* $e(A)$*.*

Ilustração 31 *As transformações elemenares (i), (ii) e (iii) podem ser aplicadas em uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}] \end{bmatrix} \tag{8}$$

da seguinte forma:

$L_1 \leftrightarrow L_m$ *em* A*, tem-se:*

$$e(A) = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]\,. \end{bmatrix} \tag{9}$$

$L_2 \rightarrow [\underline{c}, \overline{c}]\, L_2$ *em* A*, tem-se:*

$$e(A) = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{ca}_{21}, \overline{ca}_{21}] & [\underline{ca}_{22}, \overline{ca}_{22}] & \dots & [\underline{ca}_{2n}, \overline{ca}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}]\,. \end{bmatrix} \tag{10}$$

$L_2 \rightarrow L2 + [\underline{c}, \overline{c}]\, L_2$ *em* A*, tem-se:*

$$e(A) = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21} + \underline{ca}_{11}, \overline{a}_{21} + \overline{ca}_{11}] & [\underline{a}_{22} + \underline{ca}_{12}, \overline{a}_{22} + \overline{ca}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{2n} + \underline{ca}_{1n}, \overline{a}_{2n} + \overline{ca}_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}]\,. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Definição 32 *(Matrizes Equivalentes) Sejam* A *e* B *matrizes de ordem* $m \times n$*. A matriz* A *é dita equivalente por linhas a matriz* B*, se* B *pode ser obtida de* A *pela aplicação sucessiva de transformações elementares sobre linhas.*

Proposição 31 *Toda transformação elementar "e" nas linhas de matrizes de ordem $m \times n$ é reversível, no sentido que existe uma transformação "e′", tal que, $e'(e(A)) = A$ e $e(e'(A)) = A$ para todo $A \in \mathcal{A}^{m\times n}(M)$.*

Demonstração: Considere uma matriz $B = e(A)$ uma matriz obtida por transformações elementares aplicadas na matriz A, sendo $B, A \in \mathcal{M}^{m\times n}(M)$. Definindo as transformações elementares reversas
(i) Permutação das linhas: $L_j \leftrightarrow L_i$;
(ii) Multiplicação da linha L_j pelo intervalo constante $\left[\frac{1}{\underline{c}}, \frac{1}{\overline{c}}\right] \in M$ com $[\underline{c}, \overline{c}] \neq [0, 0]$: $L_j \to \left[\frac{1}{\underline{c}}, \frac{1}{\overline{c}}\right] L_j$;
(iii) Substituição da linha L_j pela subtração desta mesma linha com $\left[\frac{1}{\underline{c}}, \frac{1}{\overline{c}}\right]$ vezes uma outra linha L_i, onde $\left[\frac{1}{\underline{c}}, \frac{1}{\overline{c}}\right] \in M$ com $[\underline{c}, \overline{c}] \neq [0, 0]$: $L_j \to L_j - \left[\frac{1}{\underline{c}}, \frac{1}{\overline{c}}\right] L_i$.
Claramente verifica-se que aplicando as transformações reversas (i), (ii) e (iii) nas linhas de B obtém-se a matriz A.

Observação 31 *Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A, visto que as transformações elementares sobre linhas são reversíveis.*

Definição 33 *(Matrizes Elementares) Uma matriz elementar intervalar de ordem n é uma matriz obtida a partir de transformações elementares aplicadas na matriz identidade intervalar I_n, isto é, trata-se de uma matriz da forma*

$$E = e(I_n). \tag{12}$$

Teorema 31 *Seja "e" uma transformação elementar sobre matrizes intervalares de ordem n. Considere a matriz elementar intervalar $E = e(I_n)$, então:*

$$e(A) = EA, \quad A \in \mathcal{M}^n(M). \tag{13}$$

Demonstração: Aplicando as transformações elementares nas linhas da matriz identidade e calculando, temos (i) $L_1 \leftrightarrow L_n$:

$$EA = e(I_n)A = \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] & \dots & [1,1] \\ [0,0] & [1,1] & \dots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [1,1] & [0,0] & \dots & [0,0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \end{bmatrix} = e(A). \tag{14}$$

(ii) $L_2 \to [\underline{c}, \overline{c}]\, L_2$.

$$EA = e(I_n)A = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & \dots & [0,0] \\ [0,0] & [\underline{c},\overline{c}] & \dots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \dots & [1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{ca}_{21}, \overline{ca}_{21}] & [\underline{ca}_{22}, \overline{ca}_{22}] & \dots & [\underline{ca}_{2n}, \overline{ca}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix} = e(A). \tag{15}
$$

(iii) $L_2 \to L_2 + [\underline{c}, \overline{c}]\, L_1$

$$
EA = e(I_n)A = \begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & \dots & [0,0] \\ [\underline{c}, \overline{c}] & [1,1] & \dots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \dots & [1,1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}] \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21} + \underline{ca}_{11}, \overline{a}_{21} + \overline{ca}_{11}] & [\underline{a}_{22} + \underline{ca}_{12}, \overline{a}_{22} + \overline{ca}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{2n} + \underline{ca}_{1n}, \overline{a}_{2n} + \overline{ca}_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2}, \overline{a}_{m2}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}] \end{bmatrix} = e(A). \tag{16}
$$

O resultado é verificado para operações em qualquer linha da matriz.

Corolário 31 *Sejam $A, B \in \mathcal{M}^n(M)$. Então, A é equivalente a B por linhas se, e somente se, existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_s$ de ordem n, tais que, $E_s(...(E_2(E_1(A))...) = B$.*

Demonstração: Por definição, A é equivalente a B por linhas quando existem transformações elementares $e_1, e_2, ..., e_s$, tais que

$$
(e_s...(e_2(e_1(\left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]))...) = \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right]. \tag{17}
$$

Mas, pelo Teorema 31, sabe-se que (17) é equivalente a

$$
(E_s...(E_2(E_1(\left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]))...) = \left[[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]\right]. \tag{18}
$$

Corolário 32 *Toda matriz elementar intervalar é inversível e sua inversa também é uma matriz elementar intervalar.*

Demonstração: Considere as matrizes elementares intervalares $E = e(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]) = \left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right]$ e $E' = e'(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]) = \left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right]$, onde "$e'$"é a transformação elementar inversa de "e", pelo Teorema 31, segue que:

$$
\begin{aligned} \left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right] &= e'(e(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}])\right]) = e'(\left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right]) = e'(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]) \left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right] \\ &= \left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right] \cdot \left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right], \end{aligned} \tag{19}
$$

e

$$
\begin{aligned} \left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right] &= e(e'(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right])) = e(\left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right]) = e(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]) \left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right] \\ &= \left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right] \cdot \left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right]. \end{aligned} \tag{20}
$$

Logo, $\left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right]$ é inversível e

$$
\left[[\underline{E}_{ij}, \overline{E}_{ij}]\right]^{-1} = \left[[\underline{E'}_{ij}, \overline{E'}_{ij}]\right]. \tag{21}
$$

Proposição 32 *Seja $A \in \mathcal{M}^n(M)$ uma matriz intervalar inversível e $e_1, e_2, ..., e_s$ uma sequência de transformações elementares, tais que,*

$$(e_s...(e_2(e_1\left[[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]\right]))...) = \left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right], \tag{22}$$

onde $I_n = \left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]$ é a matriz identidade intervalar. Então, essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas a I_n, produzem A^{-1}, isto é,

$$(e_s...(e_2(e_1(\left[[\underline{I}_{ij}, \overline{I}_{ij}]\right]))...) = \left[[\underline{a}_{ij}^{-1}, \overline{a}_{ij}^{-1}]\right] = A^{-1}. \tag{23}$$

Observação 32 *Para transformações elementares de matrizes intervalares, observou-se que a operação de multiplicação de intervalos usual [2]*

$$[\underline{a}, \overline{a}] \cdot [\underline{b}, \overline{b}] = [min\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}, max\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}] \tag{24}$$

não se aplica, pois para uma transformação elementar ser válida ela deverá ter uma transformação reversa como descrito na Proposição 31, o que não é possível, como pode ser visto no exemplo abaixo. Sejam X=[-3,4] e Y=[2,6], pela multiplicação (24) tem-se:

$$X \cdot Y = [min\{-6, -18, 8, 24\}, max\{-6, -18, 8, 24\}] = [-18, 24] = Z. \tag{25}$$

A reversão direta de (25) é a divisão de Z por X para obter Y e de Z por Y para obter X, porém quando isto é feito o resultado não é alcançado, como se pode ver:

$$Z \cdot 1/X = [min\{6, -9/2, -8, 6\}, max\{6, -9/2, -8, 6\}] = [-8, 6] \neq Y. \tag{26}$$

$$Z \cdot 1/Y = [min\{-9, 12, -3, 4\}, max\{-9, 12, -3, 4\}] = [-9, 12] \neq X. \tag{27}$$

4 Conclusões

Pode-se concluir que as transformações elementares para matrizes se aplicam a matrizes intervalares, uma vez que sejam utilizadas matrizes intervalares no espaço vetorial M^{mxn} e a multiplicação de extremos de intervalos demonstrada neste trabalho. Além disto, pôde-se definir aplicações fundamentais para transformação de matrizes, como matrizes elementares e a matriz inversa intervalar.

Agradecimentos

A FAPESB e a UESC pela oportunidade concedida em realizar esta pesquisa.

Referências

1. Costa, T. M. and Chalco-Cano, Y. and Lowick,W. A., Generalized interval vector spaces and interval optimization, Information Sciences, 311, 74-85, 2015.
2. Sunaga, T., Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis, RAAG Memoirs,1958.
3. Hefez, A. and Fernandes, C. S., Introdução á Álgebra Linear, Coleção PROFMAT, SBM, 2014.
4. Moore, R. E. and Kearfott, R. B. and Colud, M. J., Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009.
5. Rufino, V. N. and Palmeira, E. S. and de Jesus, G. Q., Influência de Uma Variável Fuzzy no Problema dos Mínimos Quadrados, Anais do Encontro Nacional de Modelagem Computacional (XVIII ENMC), Salvador, Bahia, Brasil, 2015.