Um Modelo *p-fuzzy* Alternativo ao Modelo Populacional Logístico Discreto

Karine Faverzani Magnago[1], Ana Caroline Pierini[1]

[1] Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática
kamagnago@gmail.com, karolpierini@gmail.com

Abstract. Esse trabalho apresenta a proposta de modelo *p-fuzzy* que reproduz características qualitativas do modelo logístico discreto. São apresentados dois resultados, o primeiro com a evolução populacional para um ponto de equilíbrio e o segundo, para um 2-ciclo.

Keywords: Lógica *Fuzzy*; Modelos Populacionais Discretos; Simulações.

1 Introdução

O modelo populacional logístico discreto instiga a curiosidade científica pela diversidade de comportamentos evolutivos possíveis obtidos a partir da iteração de uma equação de diferenças relativamente simples; a saber:

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

em que x_n representa a população normalizada na geração n ($0 \leq x_n \leq 1$) e r, a taxa de crescimento intrínseca ($1 < r < 4$). Com a variação de um parâmetro, a taxa r, a população pode evoluir para um equilíbrio ou para um ciclo, ou ainda pode exibir regime caótico [1].

Por essa diversidade, o modelo logístico discreto foi o ponto de partida para esse trabalho de Iniciação Científica, que tem como objetivo propor modelos alternativos que reproduzam o comportamento qualitativo demonstrado pelas órbitas do modelo clássico. Essas propostas são construídas utilizando Sistemas *p-Fuzzy*, que são sistemas dinâmicos discretos nos quais a variável de estado no instante futuro é calculada somando-se a mesma no instante atual com sua variação; essa variação é obtida por meio de Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy* [2].

Dias (2006) propõe modelos *p-fuzzy* para o modelo logístico contínuo (que referencia como modelo de Verhulst) e para o modelo de Montroll. Como ambos são contínuos, a atualização da variável de estado se dá pela aplicação do Método de Runge-Kutta. Complementarmente, destaca-se que esses modelos são descritos por meio de equações diferenciais de primeira ordem e que, por isso, exibem uma variedade menor de comportamentos possíveis [3], diferenciando-se do que se apresenta nesse trabalho.

2 Conceitos Básicos e Metodologia

Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy* (SBRF) são sistemas que fazem corresponder saídas a cada entrada *fuzzy*, por meio de Lógica *Fuzzy* [4]. Uma das formas mais comuns de SBRF, conhecidos como controladores *fuzzy*, são compostos de quatro módulos básicos; a saber: um processador de entrada, uma base de regras, uma “máquina” de inferência *fuzzy* e um processador de saída [5].

Sistemas parcialmente *fuzzy* ou *p-Fuzzy* são sistemas que utilizam SBRF para relacionar variáveis a suas variações [2].

Para atingir nossos objetivos, foram desenvolvidos: o Sistema *p-Fuzzy* e os SBRF associados, cuja implementação computacional se deu no aplicativo MATLAB. Especificamente para os SBRF foi utilizado o *Toolbox Fuzzy* desse aplicativo.

No Sistema *p-fuzzy* desenvolvido, y_n representa a população na n-ésima geração e Δy_n, sua variação populacional absoluta da geração n até a geração n+1, de forma que:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n\,(1 + var) \qquad (1)$$

em que var é calculado por meio de um SBRF cuja entrada é y_n.

Para os SBRF, optou-se pelo Método de Inferência de Mamdani e pelo Método do Centro de Gravidade para “defuzificação”, os quais são largamente utilizados na literatura [6].

2.1 Construção do SBRF para o cálculo de *var*

Buscou-se construir uma única estrutura (modelo) que apresentasse toda a riqueza comportamental do modelo logístico discreto. O primeiro desafio encontrado é que a diversidade de comportamentos observados no modelo clássico acontece com a variação do parâmetro r (ver equação 1). E esse parâmetro não aparece na estrutura pensada (a ideia foi repassar esse efeito para a modelagem dos subconjuntos *fuzzy* de entrada e de saída). Para resolver esse empasse, observou-se que existe uma relação entre o valor da taxa r e o ponto de equilíbrio positivo x^* do modelo clássico (equação 1); a saber:

$$x^* = 1 - 1/r, \qquad (2)$$

que é estável quando $1 < r < 3$ e instável caso contrário. A partir desse ponto, o desenvolvimento do modelo focou-se na ideia de equilíbrio. A grosso modo, se a população encontra-se no equilíbrio, então sua variação deve ser nula.

A **Fig. 1** mostra os subconjuntos *fuzzy* das variáveis de entrada (esquerda) e de saída (direita), construídos para o SBRF que emula o caso $x^* = 1/2$ ($r = 2$). Para a variável de entrada, denominada Densidade Populacional (esquerda), foram atribuídos cinco subconjuntos *fuzzy*: Ideal (em torno do valor de equilíbrio), B (abaixo do equilíbrio), MB (muito abaixo do equilíbrio), A (acima do equilíbrio) e MA (muito acima do equilíbrio). Já para a variável de saída, Taxa de Variação, foram atribuídos os cinco subconjuntos *fuzzy*: EQUI (variação em torno de zero), N (variação negativa), MN (variação mais negativa), P (variação positiva) e MP (variação mais positiva).

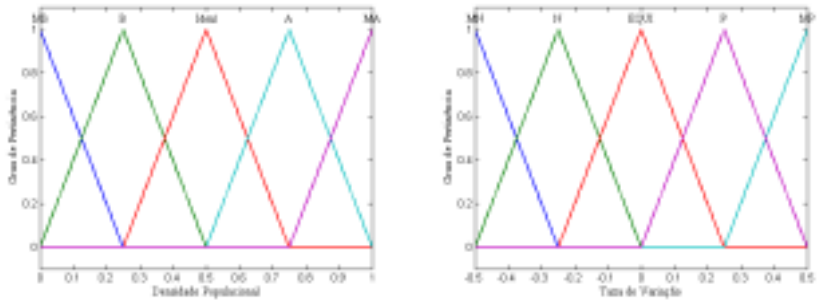

Fig. 1. Direita: variável de entrada Densidade Populacional; Esqueda: variável de saída Taxa de Variação.

A base de regras construída nesse caso foi:

1. Se Densidade Populacional é **MB**, então a Taxa de Variação é **MP**.
2. Se Densidade Populacional é **B**, então a Taxa de Variação é **P**.
3. Se Densidade Populacional é **Ideal**, então a Taxa de Variação é **EQUI**.
4. Se Densidade Populacional é **A**, então a Taxa de Variação é **N**.
5. Se Densidade Populacional é **MA**, então a Taxa de Variação é **MN**.

Para os demais SBRF construídos, fez-se variações a partir desse apresentado. Sempre se fixou o subconjunto *fuzzy* Ideal em torno do valor de equilíbrio considerado (variável de entrada) e os demais subconjuntos foram distribuídos em torno desse. A variável de saída foi mantida como a apresentada na **Fig. 1** (direita).

3 Resultados

Dois resultados produzidos com simulações computacionais do modelo proposto são apresentados na **Fig. 2**, os quais reproduzem dois típicos comportamentos qualitativos observados no modelo logístico discreto (**Fig. 2. A**: evolução populacional para um único valor; **Fig. 2. B**: evolução populacional para um ciclo de dois valores).

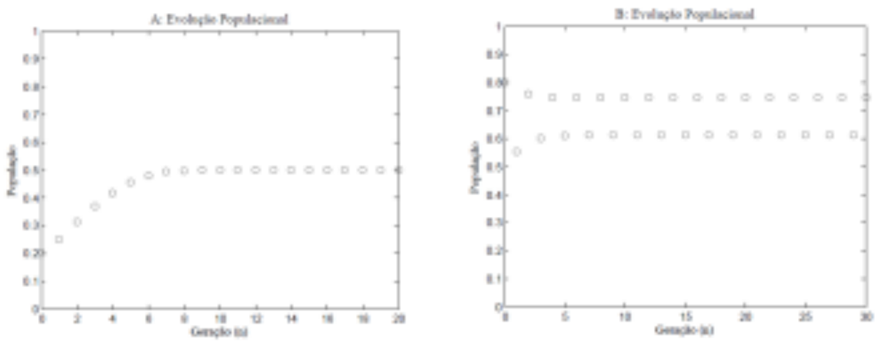

Fig. 2. Simulação populacional segundo o modelo proposto. **A**. Evolução para um equilíbrio populacional. **B**. Evolução para um 2-ciclo.

4 Conclusão

Nosso objetivo de construir um sistema *p-fuzzy* que reproduzisse as características qualitativas das órbitas do modelo logístico discreto foi atingido para o caso de equilíbrio estável de um ponto e para 2-ciclo estável.

Para trabalhos futuros, é necessário se propor modelos que reproduzam outros ciclos (4-ciclos, por exemplo) e o comportamento caótico também observados no modelo clássico.

Além disso, apesar de não ser nosso objetivo inicial, observou-se uma correspondência quantitativa entre os valores obtidos via modelo clássico e via modelo *p-fuzzy* para os casos estudados de evolução para equilíbrio de um ponto. Essa correspondência não foi tão boa nos casos de evolução para 2-ciclos. Seria necessário de estabelecer uma metodologia de estudo quantitativa, o que também pode ser desenvolvido em trabalho futuro.

Referências

1. Murray, J. D. Mathematical Biology. Springer-Verlag, New York (1989)
2. Silva, J. D. M. Análise da Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada), Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2005)
3. Dias, M. R. B. Equações Diferenciais Ordinárias com Campo de Direções Parcialmente Conhecido. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2006)
4. Barros, L. C., Bassanezi, R. C. Tópicos de Lógica *Fuzzy* e Biomatemática. UNICAMP/IMECC, Campinas (2006)
5. Jafelice, R. S. M., Barros, L. C., Bassanezi, R. C. Usando a Teoria de Conjuntos *Fuzzy* na Modelagem de Fenômenos Biológicos. In: II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2012, Natal. Anais... Natal: 2012. p. 1-64.
6. Antunes, J. Lógica Nebulosa (*Fuzzy Logic*). In: Corrar, L. J., Paulo, E., Dias Filho, J. M. (eds.) Análise Multivariada: para os cursos de administração, ciências contábeis e economia. cap. 9, pp. 460--477. Atlas, São Paulo (2012)