

Matriz de Relações *Fuzzy*: Aplicações em Questões Ambientais

Lucirene França¹, José Arnaldo Frutuoso Roveda¹, Sandra Regina Monteiro Masalskiene Roveda¹

¹ UNESP – ICT Sorocaba, Avenida Três de Março, 511 Bairro: Alto da Boa Vista CEP 18087-180 - Sorocaba, SP - Brasil

lucirene.franca@posgrad.sorocaba.unesp.br, {roveda, sandra}¹@sorocaba.unesp.br

Resumo. O uso da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* em modelagem matemática para propor soluções viáveis a problemas ambientais está ganhando destaque pelo fato de que essa teoria trabalha muito bem com a incerteza e imprecisão. Neste trabalho será apresentada a diferença entre relações clássica e *fuzzy*, bem como uma revisão bibliográfica indicando as mais recentes aplicações em questões ambientais.

Keywords: matriz; matriz *fuzzy*, questões ambientais.

1 Introdução

A degradação do meio ambiente vem ocorrendo devido ao crescimento desordenado das civilizações e o uso indiscriminado da natureza. Isso pode ser observado pela preocupação com a escassez de água, espécies em extinção e o aquecimento da camada de ozônio. Essas preocupações levam a busca por soluções de prevenção e de recuperação, ocasionando muitos progressos nas mais diversas áreas de pesquisa.

O progresso da matemática acontece devido às necessidades humanas e a busca por modelos que representem cada vez mais a realidade. Isso fez com que pesquisadores procurassem meios para lidar com a imprecisão e a incerteza. Com esse intuito, Lofti Asker Zadeh em 1965, iniciou estudos, a partir dos quais elaborou a Lógica *Fuzzy*, onde a condição de pertinência de um elemento em um conjunto passou a ser gradual.

Em [1], Zadeh apresentou a Teoria dos Conjuntos *fuzzy* e desde então ela tem sido empregada e tem mostrado resultados interessantes em vários campos, tais como inteligência artificial [2], controle automático [3], análise de imagem [4], diagnóstico médico [5], psicologia [6], de apoio à decisão [7], ciência de gestão [8], previsão do tempo [9], avaliação ambiental [10] e outros problemas em que, principalmente a incerteza e imprecisão estão presentes, seja por falta de dados, ou pelo fato de termos soluções empíricas, com base em experiência pessoal. Aqui será apresentada a diferença entre as relações clássica e *fuzzy*, sendo apontados alguns trabalhos em que se alcançaram bons resultados através da aplicação de relações *fuzzy*.

1.1 Relação Clássica

Uma relação clássica indica se há associação ou não entre dois elementos de um conjunto. De acordo com [11], uma relação R entre conjuntos U_1, U_2, \dots, U_n atribui a cada n -upla $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ exatamente uma das afirmações:

- (i) “ u_1 está relacionado com u_2, \dots, u_n ”
- (ii) “ u_1 não está relacionado com u_2, \dots, u_n ”

1.1.1 Definição

De acordo com [12], uma relação (clássica) R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ e pode ser representada por sua função característica (1)

$$X_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow \{0,1\} \quad (1)$$

com (2)

$$X_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R \end{cases} \quad (2)$$

1.2 Relação Fuzzy

Uma relação *fuzzy* indica a existência e o grau de associação entre os elementos. Assim, de acordo com as definições apresentadas em [12], temos:

1.2.1 Definição

Uma relação *fuzzy* R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto *fuzzy* de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ e pode ser representada por uma função de pertinência (3)

$$\varphi_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1] \quad (3)$$

1.2.2 Definição

O produto cartesiano *fuzzy* dos subconjuntos *fuzzy* A_1, A_2, \dots, A_n de U_1, U_2, \dots, U_n , respectivamente, é a relação *fuzzy* $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por (4)

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n) \quad (4)$$

onde \wedge representa o mínimo.

2 Aplicações de Matriz de Relações Fuzzy em Questões Ambientais

Desde a apresentação da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*, muitas pesquisas foram realizadas na intenção de resolver ou problemas de controle, ou na área da saúde e até para tomadas de decisão, por exemplo. Relações *Fuzzy* tem se mostrado eficaz principalmente nas questões que apresentam tomadas de decisão.

Alguns métodos para tomada de decisão desenvolvidos a partir de relações foram fuzzificados e vêm sendo utilizados em larga escala, como *Decision Making Trial and Evaluation Laboratory* (DEMATEL) e *Elimination Et Choix Traduisant la Réalité* (ELECTRE).

2.1 DEMATEL

O método DEMATEL, foi desenvolvido pelo Programa de Pesquisa em Ciências Naturais e Humanas do Battelle Memorial Institute de Genebra entre 1972 e 1976 e foi utilizado para resolver problemas complexos e interligados [13]. Os procedimentos do método DEMATEL [14], apresentados em [15], são divididos em seis passos:

1 - Definição das características e escalas de medição dos atributos: Neste passo, várias ferramentas e métodos, como brainstorming, opinião de especialistas, e revisão da literatura, são usados para listar e definir os atributos que podem influenciar o desempenho dos sistemas complexos. Após, estabelece-se a escala de medição para as relações causais e níveis de influência entre os atributos.

2 - Determinação da matriz de relação-direta (X): Assumindo que existem n atributos de influência em um sistema complexo, os n atributos podem ser estendidos como uma matriz de relação-direta (X) $_{n \times n}$, com base em relações mútuas e níveis de influência (5). Nessa matriz, X_{ij} representa o nível de influência que o atributo i tem sobre atributo j . A diagonal X_{ii} da matriz (X) é definida como 0.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3 - Determinação da matriz de relação-direta normalizada (N): De acordo com [13], a normalização pode ser realizada através das fórmulas (6) e (7):

$$X = kA \quad (6)$$

$$k = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

4 - Determinação da matriz de relação total (T): Tendo a matriz normalizada (N), utilizando a matriz identidade (I), obtemos a matriz de relação total (T) por (8):

$$T = X(I - X)^{-1} \quad (8)$$

5 - Determinação dos fatores e graus de influência: Após a obtenção de T , calcula-se a influência de um determinado atributo sobre outros, bem como o grau em que este atributo foi influenciado. t_{ij} são definidos como sendo as características dos atributos em (T), em que $i, j = 1, 2, \dots, n$. A soma das linhas e a soma das colunas são indicadas separadamente como os vetores D e R através das equações (9-11).

$$T = [t_{ij}]_{n \times n}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$D = [\sum_{j=1}^n t_{ij}]_{n \times 1} = [t_{i.}]_{n \times 1} \quad (10)$$

$$R = [\sum_{i=1}^n t_{ij}]_{1 \times n} = [t_{.j}]_{1 \times n} \quad (11)$$

onde o vetor D e R , respectivamente, representam a soma das linhas e das colunas da matriz de relação total $T = [t_{ij}]_{n \times n}$.

6 – Construção do diagrama de causa e efeito: A partir dos vetores D e R , temos o vetor de eixo horizontal ($D + R$), que revela a importância relativa de cada atributo, e o vetor de eixo vertical ($D - R$) pode dividir atributos para grupos de causa e de efeitos. Geralmente, quando ($D - R$) é positiva, o atributo pertence ao grupo de causa e quando o ($D - R$) for negativo, o atributo representa o grupo de efeito. Portanto, o diagrama causal pode ser obtido através do mapeamento do conjunto de dados de ($D + R$, $D - R$), auxiliando na tomada de decisões.

2.1.1 fuzzy-DEMATEL

Aplicar o DEMATEL num contexto *fuzzy* permite aos pesquisadores analisar as relações causais das variáveis *fuzzy* e determinar o nível de influência interativa entre tais variáveis [17].

A determinação do modelo *fuzzy*-DEMATEL é realizada em cinco etapas que foram apresentadas em [17]:

1 - Desenvolver padrões de avaliação e elaborar uma escala linguística *fuzzy*: Esta etapa envolve substituir as escalas de medição convencionais por uma escala linguística *fuzzy*, através de números *fuzzy*, para processar a ambiguidade do pensamento humano.

2 – Compilar a avaliação dos especialistas: Para avaliar a relação entre os vários atributos $A = \{A_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, os p especialistas são convidados para determinar as influências interativas entre os atributos, usando a escala linguística *fuzzy* para realizar comparações entre pares. Assim, as p matrizes *fuzzy* ($Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(p)}$) são obtidas por (12):

$$Z^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{12}^{(k)} & \dots & Z_{1n}^{(k)} \\ Z_{21}^{(k)} & 0 & \dots & Z_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1}^{(k)} & Z_{n2}^{(k)} & \dots & 0 \end{bmatrix}; k = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

O termo $Z^{(k)}$ representa a matriz de relação direta *fuzzy* definida pelo k -ésimo especialista.

3 – Determinar a matriz de relação-direta normalizada *fuzzy*: Por meio de uma conversão de escala linear, a matriz de relação-direta normalizada *fuzzy* pode ser expressa como se segue na equação (13):

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11}^{(k)} & \tilde{x}_{12}^{(k)} & \dots & \tilde{x}_{1n}^{(k)} \\ \tilde{x}_{21}^{(k)} & \tilde{x}_{22}^{(k)} & \dots & \tilde{x}_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1}^{(k)} & \tilde{x}_{n2}^{(k)} & \dots & \tilde{x}_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}; k = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

4 – Determinar a matriz de relação total *fuzzy*: Para determinar a matriz de relação total *fuzzy* T, é preciso assegurar que $\lim_{w \rightarrow \infty} \tilde{X}^w = \mathbf{0}$. Sendo \tilde{X}^w a matriz de relação total, dada por (14):

$$\tilde{X}^{(w)} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11}^{(w)} & \tilde{x}_{12}^{(w)} & \dots & \tilde{x}_{1n}^{(w)} \\ \tilde{x}_{21}^{(w)} & \tilde{x}_{22}^{(w)} & \dots & \tilde{x}_{2n}^{(w)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1}^{(w)} & \tilde{x}_{n2}^{(w)} & \dots & \tilde{x}_{nn}^{(w)} \end{bmatrix}, \tilde{x}_{ij}^{(w)} = (l_{ij}^{(w)}, m_{ij}^{(w)}, u_{ij}^{(w)}) \quad (14)$$

Essa matriz *fuzzy* pode ser expandida como segue nas equações (15-17):

$$[l_{ij}^{(w)}] = \begin{bmatrix} l_{11}^{(w)} & l_{12}^{(w)} & \dots & l_{1n}^{(w)} \\ l_{21}^{(w)} & l_{22}^{(w)} & \dots & l_{2n}^{(w)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^{(w)} & l_{n2}^{(w)} & \dots & l_{nn}^{(w)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[m_{ij}^{(w)}] = \begin{bmatrix} m_{11}^{(w)} & m_{12}^{(w)} & \dots & m_{1n}^{(w)} \\ m_{21}^{(w)} & m_{22}^{(w)} & \dots & m_{2n}^{(w)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}^{(w)} & m_{n2}^{(w)} & \dots & m_{nn}^{(w)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[u_{ij}^{(w)}] = \begin{bmatrix} u_{11}^{(w)} & u_{12}^{(w)} & \dots & u_{1n}^{(w)} \\ u_{21}^{(w)} & u_{22}^{(w)} & \dots & u_{2n}^{(w)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}^{(w)} & u_{n2}^{(w)} & \dots & u_{nn}^{(w)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

5 - Construção do diagrama de causa e efeito: Os resultados são, então, representados em um diagrama de causa e efeito para determinar as relações causais e influências de interação entre os vários atributos.

O modelo *fuzzy*-DEMATEL foi utilizado para classificar o sistema de medição de desempenho ambiental de uma indústria em Taiwan, em 4 grandes dimensões (desenvolvimento verde, fabricação verde, gestão verde e reciclagem verde) identificando os atributos que precisam ser melhorados para aumentar o desempenho ambiental [10].

Esse mesmo autor cita como o modelo vem sendo utilizado com resultados favoráveis em [16] que aplicou o modelo para encontrar fatores influentes na seleção de fornecedores, em [17] que segmenta os fatores críticos para implementação de gestão de conhecimento em empresas, apresentando um estudo empírico para demonstrar o método proposto e sua utilidade, um estudo similar é apresentado em [18] com o objetivo de melhor promover o desenvolvimento de competências de gestores globais.

O método DEMATEL é aplicado tanto no trabalho apresentado em [13], que apresenta um método para priorizar os locais dos centros de distribuição em uma cadeia de suprimentos quanto em [15], que apresenta uma análise da forma como os fabricantes escolhem as empresas de encomendas de manufatura, e ambos citam [7] que utiliza o método *fuzzy*-DEMATEL para apresentar uma abordagem percepção para lidar com classificação de serviço de agente imobiliário.

2.2 ELECTRE

É uma família de métodos multicritério de sobreclassificação (outranking) para auxiliar a tomada de decisão, desenvolvida e aplicada por Bernard Roy na década de 1960 com a finalidade de resolver um problema de escolha de melhor ação (alternativas) de um conjunto de ações, levando em consideração vários critérios que influenciavam na escolha [19]. Esses métodos comparam as alternativas aos pares e determina quais são preferíveis uma em relação a outra comparando-as sistematicamente critério a critério, levando a resultados numéricos que mostra índices de concordância e/ou discordância entre as alternativas. Os métodos ELECTRE diferem de acordo com o grau de complexidade, riqueza de informações necessárias ou de acordo com a problemática do problema em análise [20].

Dois conceitos básicos utilizados para a construção da relação de sobreclassificação nesta família devem ser considerados: a) *Concordância*: o fato de que um subconjunto significativo dos critérios considera que uma alternativa seja (fracamente) preferível a outra. b) *Discordância*: o fato de que não existem critérios em que a intensidade da preferência de uma alternativa em relação a outra, ultrapasse um limite inaceitável. Estes índices medem a força da hipótese de que uma alternativa sobreclassifica a outra, e a hipótese contrária, respectivamente, em relação a uma matriz de decisão final. Para considerar a avaliação da concordância, a possibilidade de ocorrência de interações entre critérios deve ser considerada [21].

Em [8], a sistematização básica dos métodos ELECTRE como um problema decisório multicritério discreto que é usualmente formulado por um conjunto de alternativas $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e um conjunto de critérios (f_1, f_2, \dots, f_k) . Os critérios são funções de valor real definidas sobre o conjunto A, de tal forma que $f_l(x_j)$ representa a performance da alternativa x_j segundo o critério f_l . Um pseudo-critério é um modelo de preferência que inclui dois limites mínimos, que permite diferenciar uma alternativa de outra, diferentes: um limite mínimo de preferência $p_l(f_l(x_j))$ e um limite mínimo de indiferença $q_l(f_l(x_j))$ para cada critério f_l ($l = 1, 2, \dots, k$). Esses limites mínimos podem ser constantes, lineares ou outras funções contínuas de $f_l(x_j)$ na forma (18):

$$p_l(f_l(x_j)) = \alpha_{p,l} + \beta_{p,l} f_l(x_j) \text{ e } q_l(f_l(x_j)) = \alpha_{q,l} + \beta_{q,l} f_l(x_j) \quad (18)$$

Para cada critério f_l , é válido que:

$$\begin{aligned} x_i \text{ é preferível a } x_j \text{ se } f_l(x_j) > f_l(x_i) + p_l(f_l(x_j)) \\ x_i \text{ é fracamente preferível a } x_j \text{ se } f_l(x_j) + q_l(f_l(x_j)) < f_l(x_i) \leq f_l(x_j) + p_l(f_l(x_j)) \\ x_i \text{ é indiferente a } x_j \text{ se } f_l(x_j) + q_l(f_l(x_j)) \geq f_l(x_i) \text{ e } f_l(x_i) + q_l(f_l(x_i)) \geq f_l(x_j) \end{aligned}$$

$p_l(f_l(x_j))$ e $q_l(f_l(x_j))$ são limites mínimos de preferência e de indiferença, de forma que $p_l(f_l(x_j)) > q_l(f_l(x_j)) > 0$.

De acordo com [22], os componentes da família ELECTRE são descritos por:

ELECTRE I: É a base de todos os outros métodos da família e foi projetada para tratar os problemas de escolha, com o objetivo de determinar qual alternativa apresenta melhor compromisso para a solução do problema.

ELECTRE II: É um aprimoramento da versão I, usada para ordenar alternativas (classificação) a partir de um conjunto de índices de concordância e discordância associado à atribuição de pesos aos critérios. O intuito na utilização desse método não é escolher a melhor e sim classificá-las, produzindo um ranqueamento das alternativas.

ELECTRE III: Trabalha com a problemática de ordenação, assim como a versão II, mas incorpora a metodologia *Fuzzy* na construção do cálculo da ordenação de alternativas, permitindo a incorporação das imprecisões e incertezas do processo de tomada de decisões, fixando os limites mínimos de preferência e indiferença. A ordenação de alternativas da melhor para a pior é conseguida por meio da introdução de ponderações nos critérios.

ELECTRE IV: Tem como objetivo ordenar alternativas da melhor para a pior, no entanto, é empregada em problemas em que não se pode introduzir qualquer ponderação nos critérios e/ou em que o agente de decisão não queira determinar pesos ou critérios. Dessa forma, obtém-se a solução por meio de uma sequência de relações de superação agrupadas. Essa versão foi criada para tratar, especificamente, o problema de planejamento urbano apresentado em [23].

ELECTRE TRI: Tem como objetivo a classificação de alternativas, no entanto não as ordena, aloca as alternativas em três classes: aceitável, inaceitável e indeterminado.

2.2.1 *fuzzy*-ELECTRE

O método *fuzzy*-ELECTRE (ELECTRE III), pertence à família do método e é apresentado como evolução a partir da versão I.

ELECTRE III: De acordo com [8], esse método considera um grau de superação $S(x_i, x_j)$ que descreve a credibilidade de superação de x_i sobre x_j , assumindo seus valores entre 0 e 1. O valor de $S(x_i, x_j)$ é definido com base nas análises de concordância (índices de concordância) e discordância (índices de discordância).

Análise de concordância: consiste em representar relações *fuzzy* de tal forma que o índice de concordância $C(x_i, x_j)$ representa a porcentagem de pesos do critério que concorda com a proposição de que x_i supera x_j .

$C(x_i, x_j)$ é definido por: $C(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^k w_i c_i(x_i, x_j)$ (19), onde os coeficientes de peso w_l somam 1 e

$$c_i(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_i(x_i) + q_i(f_i(x_i)) \geq f_i(x_j) - \text{condição 1,} \\ 0 & \text{se } f_i(x_i) + p_i(f_i(x_i)) \leq f_i(x_j) - \text{condição 2,} \\ y = \frac{p_i(f_i(x_i)) - f_i(x_j) - f_i(x_i)}{p_i(f_i(x_i)) - q_i(f_i(x_i))}, & \text{de outra maneira. - condição 3} \end{cases} \quad (19)$$

Análise de discordância: É necessário um outro limite mínimo, o limite mínimo de veto $v_l(f_i(x_i))$, que, como os outros limites mínimos, pode ser constante, linear ou outra função contínua. O índice de discordância $d_l(x_i, x_j)$ (20) é definido para cada critério f_i como:

$$d_l(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_l(x_j) \leq f_l(x_i) + p_l(f_l(x_i)) - \text{condição 1,} \\ 1 & \text{se } f_l(x_j) \geq f_l(x_i) + v_l(f_l(x_i)) - \text{condição 2,} \\ z = \frac{f_l(x_j) - f_l(x_i) - p_l(f_l(x_i))}{v_l(f_l(x_i)) - p_l(f_l(x_i))}, & \text{de outra maneira. - condição 3} \end{cases} \quad (20)$$

sendo $v_l(f_l(x_i)) > p_l(f_l(x_i))$.

Relação de Superação *fuzzy*: Denotando por $J(x_i, x_j)$ o conjunto de critérios para os quais $d_l(x_i, x_j) > C(x_i, x_j)$. Se $J(x_i, x_j) = \emptyset$, nós temos $d_l(x_i, x_j) \leq C(x_i, x_j)$ para todo $l = 1, 2, \dots, k$. O grau de superação $S(x_i, x_j)$ é definido por (21):

$$S(x_i, x_j) = \begin{cases} C(x_i, x_j) & \text{se } J(x_i, x_j) = \emptyset \\ C(x_i, x_j) \prod_{i \in J(x_i, x_j)} \frac{1 - d_l(x_i, x_j)}{1 - C(x_i, x_j)}, & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (21)$$

A ordenação das decisões alternativas no ELECTRE III é normalmente conduzida em ordens decrescente e crescente, ou seja, com base na sua qualificação da melhor para a pior e da pior para a melhor.

Ordenação das alternativas com base no indicador de qualificação: Definida a matriz de credibilidade, o próximo passo do método ELECTRE III consiste em produzir a ordenação das alternativas. A aproximação geral para a exploração é feita de maneira a construir duas pré-ordens $Z1$ e $Z2$ usando os processos descendente e ascendente e então combinar as informações resultantes para produzir uma pré-ordem parcial $Z = Z1 \cap Z2$. Para o processo descendente, considera-se $\lambda = \max_{a,b \in A} S(a,b)$ e determina-se um “valor de credibilidade”, tal que somente os valores de $S(a,b)$ suficientemente próximos de λ são considerados $\lambda - s(\lambda)$. Então, se $\lambda = 1$, assumir $s(\lambda) = 0,15$, define-se a matriz T como (22):

$$T = \begin{cases} 1, & \text{se } S(a,b) > \lambda - s(\lambda) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (22)$$

Em seguida, define-se a qualificação de cada projeto ($Q(a)$) como o número de projetos que são superados por a menos o número de projetos que superam a . $Q(a)$ é simplesmente a soma dos elementos da linha menos a soma dos elementos da coluna da matriz T . O conjunto de alternativas que possui a maior qualificação compõe o conjunto $D1$. Se $D1$ contiver somente uma alternativa, repete-se o procedimento anterior para A excluindo-se $D1$. Caso contrário, aplica-se o mesmo procedimento internamente a $D1$. Se $D2$ contiver apenas uma alternativa, o procedimento é iniciado em $D1$ excluindo-se $D2$ (a menos que ele esteja vazio); caso contrário, é aplicado internamente a $D2$, e assim por diante, até que $D1$ se torne vazio. Repete-se o procedimento começando com A excluindo-se $D1$. O resultado é a primeira pré-ordem $Z1$, a ordem descendente.

Em [8] e [24] é apresentado o emprego do ELECTRE III, como ferramenta de suporte à tomada de decisão aplicada a um sistema integrado de resíduos sólidos em nível regional e aponta soluções alternativas que definem completamente as estratégias de gerenciamento em que coleta, transporte, tratamento e destinação final são avaliados e ordenados, considerando critérios múltiplos, aos quais pesos e limites de indiferença, preferência e rejeição são atribuídos. O mesmo método também é utilizado para classificar aglomerados produtivos de micro e pequena empresa, em relação à capacidade de desenvolver estratégia de sobrevivência, por meio do relacionamento com o fornecedor, com o cliente ou distribuidor, com os concorrentes e com instituições públicas e privadas de apoio [25].

Uma nova abordagem, mais abrangente para especificar limites realistas para p , q e v , no contexto de uma avaliação ambiental, onde a sensibilidade humana é levada em conta, com aplicação na avaliação de impactos em projeto de estrada, é apresentada em [26]. O método também é usado em classificação de fornecedores para empresas [27] e [28].

Em [29] também é apresentada a utilização do ELECTRA I em um ambiente *fuzzy*, para auxiliar em tomada de decisão em que o método revela informações mais úteis, incluindo a incomparabilidade entre as ações e um exemplo numérico para elucidar os detalhes do método proposto, já em [30], a extensão do método é para aperfeiçoar a seleção de locais de implantação de empreendimentos.

Outros trabalhos envolvendo relações e teoria *fuzzy* são apresentados em [31 – 35]. Em [31] a teoria *fuzzy* é aplicada em equações diferenciais para determinação dos campos de risco ao longo de um rio, auxiliando no controle de concessão de outorga de lançamentos e na Gestão dos Recursos Hídricos. Matriz de decisão *fuzzy* é utilizada com o intuito de controlar inundações em sistema de reservatórios tipo cascata [32] e o método foi aplicado no rio Yangtze, na China [33]. Relações de preferência são utilizadas em um procedimento

para tomada de decisão multicritério em grupo, cujo ambiente apresenta uma estrutura hierárquica [34], e é demonstrado através da aplicação no planejamento estratégico de uma empresa de geração de energia elétrica [35]. Vetores *fuzzy*, são utilizados para comparação categórica de mapas e indica-se o uso do método para análise de imagens em geral [4].

3 Conclusão

A partir do estudo realizado, espera-se mostrar que as relações *fuzzy* vêm se tornando bastante útil nas mais diversas áreas e aplicações dentro da multidisciplinaridade encontrada em Ciências Ambientais, principalmente no que concerne à tomada de decisão e gestão de recursos naturais.

Referências

1. Zadeh, L.A., *Fuzzy Sets*, Information and Control, vol. 8, 1965, pp. 338-353.
2. SDAO, F. et al. Landslide susceptibility assessment by using a neuro-fuzzy model: a case study in the Rupestrian heritage rich area of Matera. *Natural Hazards and Earth System Science*, v. 13, n. 2, p. 395-407, 2013.
3. CAMBOIM, Wil Lavor; DA SILVA, Simplicio Arnaud; GOMES, Heber Pimentel. Aplicação de técnicas de controle Fuzzy em sistemas de abastecimento. *Engenharia Sanitária e Ambiental*, v. 19, n. 1, 2013.
4. HAGEN, Alex. *Fuzzy set approach to assessing similarity of categorical maps*. *International Journal of Geographical Information Science*, v. 17, n. 3, p. 235-249, 2003.
5. DE SOUSA, Clóvis A. et al. Mapas cognitivos fuzzy em diagnósticos médicos: uma aplicação no diagnóstico de pneumonia em crianças. *Biological Research*, v. 37, p. 701-709, 2004.
6. DE OLIVEIRA, Fernando M. et al. Avaliação do método Fuzzy para Reconhecimento de Padrão Comportamental da Ansiedade durante a TERV.
7. TSENG, Ming-Lang. A causal and effect decision making model of service quality expectation using *grey-fuzzy DEMATEL* approach. *Expert systems with applications*, v. 36, n. 4, p. 7738-7748, 2009.
8. AKUTSU, Jorge; REIS, Luisa Fernanda Ribeiro. EMPREGO DO MÉTODO ELECTRE NA ANÁLISE MULTICRITERIAL APLICADA AO GERENCIAMENTO REGIONAL INTEGRADO DE RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS.
9. VIEIRA, Samuel Oliveira et al. Application of Fuzzy method in the classification of the South Atlantic convergence zone in the Amazon region. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 29, n. 4, p. 621-631, 2014.
10. TSAI, Sang-Bing et al. Using the *fuzzy DEMATEL* to determine environmental performance: a case of printed circuit board industry in Taiwan. *PloS one*, v. 10, n. 6, p. e0129153, 2015.
11. LIPSCHUTZ, Seymour. *Álgebra Linear*. Trad. Roberto Ribeiro Baldino. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.
12. DE BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney Carlos. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2006.
13. AMIRI, Maghsud et al. Developing a DEMATEL method to prioritize distribution centers in supply chain. *Management Science Letters*, v. 1, n. 3, p. 279-288, 2011.
14. GABUS, A.; FONTELA, E. *Perceptions of the world problematique: Communication procedure, communicating with those bearing collective responsibility*. Battelle Geneva Research Centre, Geneva, Switzerland, 1973.

15. TSAI, Sang-Bing et al. Examining how manufacturing corporations win orders. *South African Journal of Industrial Engineering*, v. 24, n. 3, p. 112-124, 2013.
16. CHANG, Betty; CHANG, Chih-Wei; WU, Chih-Hung. *Fuzzy DEMATEL method for developing supplier selection criteria*. *Expert systems with Applications*, v. 38, n. 3, p. 1850-1858, 2011.
17. WU, Wei-Wen. Segmenting critical factors for successful knowledge management implementation using the *fuzzy DEMATEL method*. *Applied Soft Computing*, v. 12, n. 1, p. 527-535, 2012.
18. WU, Wei-Wen; LEE, Yu-Ting. Developing global managers' competencies using the *fuzzy DEMATEL method*. *Expert systems with applications*, v. 32, n. 2, p. 499-507, 2007.
19. ROY, Bernard. Critères multiples et modélisation des préférences: l'apport des relations de surclassement. SEMA, 1973.
20. BELTON, Valerie; STEWART, Theodor. *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Springer Science & Business Media, 2002.
21. ALMEIDA, AT de; COSTA, A. P. C. S. *Aplicações com métodos multicritério de apoio à decisão*. Recife: Editora Universitária, 2003.
22. ROY, B. et Bouyssou D., 1993, Aide multicritère à la décision: Méthodes et cas. Economica, Paris.
23. ROY, B.; HUGONNARD, J.-Chr. Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research Part A: General*, v. 16, n. 4, p. 301-312, 1982.
24. ROGERS, Martin; BRUEN, Michael. A new system for weighting environmental criteria for use within ELECTRE III. *European Journal of Operational Research*, v. 107, n. 3, p. 552-563, 1998.
25. INFANTE, Carlos Eduardo Durango de Carvalho; MENDONÇA, Fabricio Molica de; VALLE, Rogerio de Aragão Bastos do. Robustness analysis with Electre III method: the case of the Campo das Vertentes region in Minas Gerais. *Gestão & Produção*, v. 21, n. 2, p. 245-255, 2014.
26. ROGERS, Martin; BRUEN, Michael. Choosing realistic values of indifference, preference and veto thresholds for use with environmental criteria within ELECTRE. *European Journal of Operational Research*, v. 107, n. 3, p. 542-551, 1998.
27. MONTAZER, Gholam Ali; SAREMI, Hamed Qahri; RAMEZANI, Maryam. Design a new mixed expert decision aiding system using *fuzzy ELECTRE III method for vendor selection*. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 8, p. 10837-10847, 2009.
28. GUARNIERI, Patricia; ALMEIDA, Adiel Teixeira de. Framework to manage suppliers for strategic alliances with a multicriteria method. *Production*, v. 25, n. 3, p. 713-724, 2015.
29. HATAMI-MARBINI, Adel; TAVANA, Madjid. An extension of the Electre I method for group decision-making under a *fuzzy environment*. *Omega*, v. 39, n. 4, p. 373-386, 2011.
30. DEVI, Kavita; YADAV, Shiv Prasad. A multicriteria intuitionistic *fuzzy group decision making for plant location selection with ELECTRE method*. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 66, n. 9-12, p. 1219-1229, 2013.
31. DOS SANTOS, Sílvia Helena Lima et al. Estudo do Risco na Concessão de Outorga para Lançamentos Difusos de Efluentes em Rios Utilizando uma Metodologia *Fuzzy*. *Periódico Eletrônico Fórum Ambiental da Alta Paulista*, v. 9, n. 2, 2013.
32. CHUNTIAN, Cheng. *Fuzzy Optimal Decisions for Multiobjective Flood Control System of Cascade Reservoirs*. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, v. 3, p. 6-13, 1999.
33. CHUNTIAN, Cheng. *Fuzzy optimal model for the flood control system of the upper and middle reaches of the Yangtze River*. *Hydrological Sciences Journal*, v. 44, n. 4, p. 573-582, 1999.
34. EKEL, P.; Parreiras, R. Esquema de Consenso para Decisão em Grupo por Meio de Avaliações Lingüísticas.
35. PARREIRAS, Roberta et al. Tomada de Decisão Multicritério em Grupo com Estrutura Hierárquica Usando Modelagem das Relações de Preferência *Fuzzy*.