

Memória Associativa Bidirecional Exponencial Fuzzy Generalizada Aplicada ao Reconhecimento de Faces.*

Aline Cristina de Souza and Marcos Eduardo Valle

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Matemática Aplicada,
Campinas - SP, Brasil.

s.alinedesouza@gmail.com, valle@ime.unicamp.br

Resumo Memórias associativas são modelos inspirados na capacidade do cérebro humano de armazenar e recordar informações por meio de associações. Tais modelos têm como objetivo armazenar um conjunto finito de associações. Além disso, espera-se que a memória tenha uma certa tolerância a ruído. Memórias associativas podem ser classificadas em autoassociativas ou heteroassociativas conforme o tipo das associações a serem armazenadas. As memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas (GRE-FAMs, do inglês *generalized recurrent exponential fuzzy associative memories*), podem ser utilizadas para implementar uma memória autoassociativa para o armazenamento e recordação de conjuntos fuzzy. Neste trabalho, apresentamos uma versão heteroassociativa bidirecional das GRE-FAMs e avaliamos seu desempenho num problema de reconhecimento de faces.

Palavras-chave Memórias associativas, medidas de similaridade, redes neurais recorrentes, reconhecimento de faces.

1 Introdução

Memórias associativas são modelos matemáticos, biologicamente inspirados, projetados para o armazenamento e recordação de um conjunto finito de associações $\{(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{a}^p, \mathbf{b}^p)\}$, chamado conjunto das memórias fundamentais [8,12]. Tais modelos podem ser vistos como um sistema de entrada-saída de modo que, ao fornecer \mathbf{a}^ξ como entrada, espera-se que a memória produza \mathbf{b}^ξ como saída. Além disso, espera-se que a memória tenha uma certa tolerância a ruídos, isto é, que seja capaz de recuperar um padrão armazenado \mathbf{b}^ξ mesmo quando uma versão incompleta ou ruidosa de \mathbf{a}^ξ é apresentado como entrada.

Uma memória associativa pode ser classificada conforme o conjunto das memórias fundamentais $\{(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{a}^p, \mathbf{b}^p)\}$. Dizemos que uma memória é autoassociativa se $\mathbf{a}^\xi = \mathbf{b}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Nesse caso, o conjunto das

* Este trabalho teve o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2015/00745-1, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 305486/2014-4.

memórias fundamentais pode ser escrito como $\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^p\}$. Se existe algum índice ξ , tal que $\mathbf{a}^\xi \neq \mathbf{b}^\xi$, a memória é dita heteroassociativa [8].

A rede de Hopfield, proposta por Hopfield em 1982, é um dos modelos de redes neurais mais conhecidos para a implementação de um memória autoassociativa para armazenamento e recordação de vetores bipolares (ou binários) [10]. Apesar de suas várias aplicações [6,7,9,15], a rede de Hopfield apresenta uma baixa capacidade de armazenamento [18]. Com o objetivo de superar essa limitação, muitos pesquisadores desenvolveram modelos aperfeiçoados da rede de Hopfield. No início dos anos 1990, Chiueh e Goodman introduziram as memórias associativas recorrentes por correlação exponencial (ECAM, do inglês *exponential correlation associative memory*) para o armazenamento e recordação de padrões bipolares no caso autoassociativo [3]. Para o caso heteroassociativo, Chiueh et al. introduziram a memória associativa bidirecional exponencial (EBAM, do inglês *exponential bidirectional associative memory*), a qual pode ser usada para armazenar pares de vetores bipolares [11].

No entanto, muitas aplicações de memórias associativas exigem o armazenamento de vetores com coordenadas reais ou conjuntos fuzzy [2,5,13,14,21]. As memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas (GRE-FAMs, do inglês *generalized recurrent exponential fuzzy associative memories*) [20], projetadas para o armazenamento e recordação de uma família finita de conjuntos fuzzy, podem ser vistas como uma versão fuzzy da ECAM de Chiueh e Goodman. Neste trabalho, inspirados pela EBAM, descreveremos como estender uma GRE-FAM para o caso heteroassociativo. Posteriormente, apresentaremos a aplicação dos novos modelos à um problema de reconhecimento de faces.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na próxima seção, faremos uma breve revisão sobre a ECAM e a EBAM, modelos de memórias associativas para armazenamento e recordação de vetores bipolares. Em seguida, na seção 3, apresentaremos as memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas (GRE-FAMs). Na seção 4, como principal objetivo, descreveremos como uma GRE-FAM pode ser estendida para implementar uma memória associativa heteroassociativa bidirecional chamada memória associativa bidirecional exponencial fuzzy generalizada (GEB-FAM, do inglês *generalized exponential bidirectional fuzzy associative memory*). Na quinta seção apresentaremos a aplicação das GEB-FAMs ao reconhecimento de faces e mostraremos os resultados de experimentos computacionais realizados. Finalizaremos o trabalho com as considerações finais na seção 6.

2 Memórias Associativas Exponenciais Bipolares

As memórias associativas recorrentes por correlação exponencial (ECAM), introduzidas por Chiueh e Goodman [3], são definidas da seguinte maneira. Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{a}^\xi : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \{-1, +1\}^n$. Dado um padrão inicial $\mathbf{x}_0 \in \{-1, 1\}^n$, a ECAM produz recursivamente uma sequência

de vetores $\mathbf{x}_t \in \{-1, 1\}^n$ definidos por:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \text{sgn} \left\{ \sum_{\xi=1}^p e^{\alpha \langle \mathbf{a}^\xi, \mathbf{x}_t \rangle} \mathbf{a}^\xi \right\}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1)$$

em que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ denota o produto interno usual dos vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} , $\alpha > 0$ um número real e sgn é a função sinal aplicada componente a componente. Lembre-se que a função sinal retorna +1 se o argumento é positivo e -1 quando é negativo.

Observe que \mathbf{x}_{t+1} , para $t \geq 0$, é obtido a partir de uma combinação linear das memórias fundamentais \mathbf{a}^ξ , $\xi = 1, \dots, p$, em que os pesos são dados por uma exponencial do produto interno entre \mathbf{x}_t e cada memória fundamental \mathbf{a}^ξ , $\xi = 1, \dots, p$. Em termos gerais, a função exponencial enfatiza o valor do produto interno entre uma memória fundamental e \mathbf{x}_t . Dessa forma, o peso da memória fundamental cujo produto interno com \mathbf{x}_t apresenta o maior valor se torna muito maior que os demais no cálculo de \mathbf{x}_{t+1} . Além disso, o produto interno entre vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} bipolares de tamanho n satisfaz

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = n - \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2. \quad (2)$$

Portanto, ele fornece uma medida da similaridade de \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Para o caso heteroassociativo, Chiueh et al. propuseram a memória associativa bidirecional exponencial (EBAM, do inglês *exponential bidirectional associative memory*) [11]. Especificamente, dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{a}^p, \mathbf{b}^p)\} \subseteq \{-1, 1\}^n \times \{-1, 1\}^m$ e um escalar $\alpha > 0$, um ciclo do processo de recuperação da EBAM é descrito pelo par de equações

$$\mathbf{y}_t = \text{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^p e^{\alpha \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}_t \rangle} \mathbf{b}^i \right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{t+1} = \text{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^p e^{\alpha \langle \mathbf{b}^i, \mathbf{y}_t \rangle} \mathbf{a}^i \right\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

A ECAM e a EBAM são modelos projetados para o armazenamento e recordação de padrões bipolares. No entanto, em algumas aplicações, as memórias fundamentais são dadas por vetores com valores reais ou conjuntos fuzzy. Na próxima seção, recordaremos a definição das memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas, modelos para armazenamento e recordação de conjuntos fuzzy.

3 Memória Associativa Recorrente Exponencial Fuzzy Generalizada

Nessa seção apresentaremos uma revisão de alguns conceitos importantes para o desenvolvimento do trabalho. Posteriormente, apresentaremos as memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas.

Um subconjunto fuzzy X de um conjunto universo U é caracterizado por sua função de pertinência $X : U \rightarrow [0, 1]$, de forma que, dado um elemento $u \in U$,

$X(u)$ indica o grau com o qual u pertence a X [1,19]. Denotaremos por $\mathcal{F}(U)$ o conjunto de todos os subconjuntos fuzzy de U e por $\mathcal{P}(U)$ o conjunto das partes de U , ou seja, a família de todos os conjuntos clássicos (crisp) de U .

No caso em que o conjunto universo $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é finito, um subconjunto fuzzy X de U pode ser identificado com o vetor $X = (X(u_1), \dots, X(u_n))$ pertencente ao hiper-cubo unitário n -dimensional $[0, 1]^n$.

Uma medida de similaridade fuzzy, ou simplesmente medida de similaridade, é uma função que associa a um par de subconjuntos fuzzy de um universo U um número pertencente ao intervalo $[0, 1]$, o qual indica o grau de semelhança desses conjuntos. A definição de medida de similaridade pode variar de acordo com o contexto. Neste trabalho, consideraremos a versão normalizada da definição axiomática proposta por Xuecheng [22], conforme definição a seguir:

Definição 1 (medida de similaridade fuzzy) *Seja U um universo de discurso. Uma função $\mathcal{S} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ é uma medida de similaridade fuzzy se satisfaz, para quaisquer $A, B, C, D \in \mathcal{F}(U)$, as seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{S}(A, A) = 1$.
2. $\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{S}(B, A)$.
3. Se $A \subset B \subset C \subset D$, então $\mathcal{S}(A, D) \leq \mathcal{S}(B, C)$.
4. $\mathcal{S}(A, \bar{A}) = 0$, para todo $A \in \mathcal{P}(U)$, em que \bar{A} denota o complemento de A .

Além disso, se $\mathcal{S}(A, B) = 1$ implica $A = B$, dizemos que \mathcal{S} é uma medida de similaridade forte.

Exemplo 1 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy quaisquer de um universo de discurso finito $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. As seguintes funções são exemplos de medidas de similaridade forte [24,4]:*

1. *Medida de Similaridade de Gregson*

$$\mathcal{S}_G(A, B) = \frac{\sum_{j=1}^n \min(A(u_j), B(u_j))}{\sum_{j=1}^n \max(A(u_j), B(u_j))}. \quad (4)$$

2. *Medida de Similaridade de Eisler e Ekman*

$$\mathcal{S}_E = \frac{2 \sum_{j=1}^n \min(A(u_j), B(u_j))}{\sum_{j=1}^n A(u_j) + B(u_j)}. \quad (5)$$

Uma memória associativa projetada para o armazenamento e recordação de um conjunto fuzzy é chamada de memória associativa fuzzy. As memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas (GRE-FAM, do inglês

generalized recurrent exponential fuzzy associative memory), são modelos auto-associativos projetados para o armazenamento e recordação de uma família finita de conjuntos fuzzy [20]. Especificamente, uma GRE-FAM é definida como segue:

Definição 2 *Sejam $\{A^1, A^2, \dots, A^p\} \subseteq \mathcal{F}(U)$ o conjunto das memórias fundamentais, \mathcal{S} uma medida de similaridade, $\alpha > 0$ um número real e G uma matriz real de dimensão $p \times p$. Dado um conjunto fuzzy inicial $X_0 \in \mathcal{F}(U)$, a GRE-FAM produz recursivamente uma sequência de conjuntos fuzzy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ definidos por*

$$X_{t+1}(u) = \varphi \left(\sum_{\xi=1}^p w_{\xi t} A^\xi(u) \right), \quad \forall u \in U, \forall t \geq 0, \quad (6)$$

em que os pesos $w_{\xi t}$ são determinados pela equação

$$w_{\xi t} = \frac{\sum_{\mu=1}^p g_{\xi\mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_t)}}{\sum_{\eta=1}^p \sum_{\mu=1}^p g_{\eta\mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_t)}}, \quad \forall \xi = 1, \dots, p, t \geq 0. \quad (7)$$

e a função φ , dada por $\varphi(x) = \max\{0, \min\{x, 1\}\}$, garante que $X_{t+1}(u) \in [0, 1]$.

Observe que, tal como a ECAM, o padrão X_{t+1} produzido por uma GRE-FAM é uma combinação linear das memórias fundamentais. Além disso, os coeficientes são definidos a partir de uma exponencial da medida de similaridade entre as memórias fundamentais e X_t . No entanto, a ECAM é projetada para o armazenamento de vetores bipolares enquanto que uma GRE-FAM armazena e recorda conjuntos fuzzy. Em vista dessas observações, uma GRE-FAM podem ser vista como uma versão fuzzy de uma ECAM.

Consideremos agora uma GRE-FAM obtida considerando $G = C^{-1}$, em que $C = \{c_{ij}\}$ é a matriz definida por

$$c_{ij} = e^{\alpha \mathcal{S}(A^i, A^j)}, \quad \forall i, j = 1, \dots, p. \quad (8)$$

Para tal escolha da matriz G , as memórias fundamentais são todas pontos fixos da GRE-FAM [20]. Portanto, esse modelo pode ser usado para implementar uma memória autoassociativa.

O teorema a seguir caracteriza a saída de um passo de uma GRE-FAM [20].

Teorema 1 *Seja $\mathcal{A} = \{A^1, \dots, A^p\} \subseteq \mathcal{F}(U)$ o conjunto das memórias fundamentais e \mathcal{S} uma medida de similaridade forte. Suponha que a matriz $C_\alpha = \{c_{ij}\}$, cujas componentes são $c_{ij} = e^{\alpha \mathcal{S}(A^i, A^j)}$, seja invertível para todo $\alpha > 0$. Dado um conjunto fuzzy X_0 , temos que:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} X_1(u) = \frac{1}{\text{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma} A^\gamma(u), \quad \forall u \in U, \quad (9)$$

em que $\Gamma = \{\gamma : \mathcal{S}(A^\gamma, X_0) \geq \mathcal{S}(A^\xi, X_0), \forall \xi = 1, \dots, p\}$ e X_1 denota a saída de um único passo da GRE-FAM com $G = C_\alpha^{-1}$. Além disso, os pesos $w_{\xi 0}$ determinados por (7) satisfazem a seguinte identidade para todo $\xi = 1, \dots, p$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w_{\xi 0} = \begin{cases} \frac{1}{\text{card}(\Gamma)}, & \text{se } \xi \in \Gamma \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (10)$$

Em palavras, o Teorema 1 afirma que uma GRE-FAM produz em um passo um padrão tão próximo quanto desejado da média aritmética das memórias fundamentais mais similares à X_0 quando o parâmetro α é suficientemente grande.

4 Memória Associativa Bidirecional Exponencial Fuzzy Generalizada

Nessa seção, inspirados pela EBAM, apresentaremos uma extensão da GRE-FAM descrita por (6) e (7) para o caso heteroassociativo. O novo modelo heteroassociativo bidirecional será chamado memória associativa bidirecional exponencial fuzzy generalizada (GEB-FAM, do inglês *generalized exponential bidirectional fuzzy associative memory*).

Suponha que o conjunto das memórias fundamentais tenha a seguinte forma $\{(A^\xi, B^\xi), \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$. Considere um número real $\alpha > 0$, uma medida de similaridade $\mathcal{S} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ e uma matriz G de dimensão $p \times p$. Dado um conjunto fuzzy de entrada X_0 , uma GEB-FAM define recursivamente sequências de conjuntos fuzzy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ e $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ através das seguintes equações para todo $t \geq 0$, $u \in U$ e $v \in V$:

$$Y_t(v) = \varphi \left(\sum_{\xi=1}^p w_{\xi t}^A B^\xi(v) \right) \quad \text{e} \quad X_{t+1}(u) = \varphi \left(\sum_{\xi=1}^p w_{\xi t}^B A^\xi(u) \right), \quad (11)$$

em que os pesos $w_{\xi t}^A$ e $w_{\xi t}^B$ são definidos como segue para todo $\xi = 1, \dots, p$:

$$w_{\xi t}^A = \frac{\sum_{\mu=1}^p g_{\xi \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_t)}}{\sum_{\eta=1}^p \sum_{\mu=1}^p g_{\eta \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_t)}} \quad \text{e} \quad w_{\xi t}^B = \frac{\sum_{\mu=1}^p g_{\xi \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(B^\mu, Y_t)}}{\sum_{\eta=1}^p \sum_{\mu=1}^p g_{\eta \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(B^\mu, Y_t)}}. \quad (12)$$

Observe que o conjunto fuzzy Y_t é definido por uma combinação linear dos conjuntos fuzzy B^ξ ponderado por uma exponencial da medida de similaridade entre X_t e A^ξ , como $\xi = 1, \dots, p$. De maneira semelhante, X_{t+1} é dado por uma combinação linear dos padrões A^ξ cujos pesos são calculados por uma exponencial da similaridade entre Y_t e os padrões B^ξ , $\xi = 1, \dots, p$.

No caso de uma GEB-FAM de passo único, dado $X_0 \in \mathcal{F}(U)$, simplesmente definimos $Y_0 \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

$$Y_0(v) = \varphi \left(\sum_{\xi=1}^p w_{\xi 0}^A B^\xi(v) \right), \quad \forall v \in V, \quad (13)$$

em que

$$w_{\xi 0}^A = \frac{\sum_{\mu=1}^p g_{\xi \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_0)}}{\sum_{\eta=1}^p \sum_{\mu=1}^p g_{\eta \mu} e^{\alpha \mathcal{S}(A^\mu, X_0)}}, \quad \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (14)$$

Similar ao Teorema 1, pode-se mostrar que os pesos $w_{\xi 0}^A$ determinados por (14) satisfazem a seguinte equação para todo $\xi = 1, \dots, p$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w_{\xi 0}^A = \begin{cases} \frac{1}{\text{card}(\Gamma)}, & \text{se } \xi \in \Gamma \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (15)$$

em que $\Gamma = \{\gamma : \mathcal{S}(A^\gamma, X_0) \geq \mathcal{S}(A^\xi, X_0), \forall \xi = 1, \dots, p\}$. Além disso, tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Y_0(v) = \frac{1}{\text{card}(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma} B^\gamma(v), \quad \forall v \in U. \quad (16)$$

Portanto, tal como as GRE-FAMs, uma GEB-FAM de passo único produz como saída um padrão tão próximo quanto desejado da média aritmética dos conjuntos fuzzy B^ξ 's associados aos itens A^ξ 's mais similares à X_0 quando o parâmetro α é suficientemente grande. Contudo, na próxima seção veremos que nem sempre é vantajoso considerar α grande.

5 Aplicação num Problema de Reconhecimento Facial

Em um problema de reconhecimento facial, o objetivo é associar uma imagem à pessoa a qual ela pertence. Esta tarefa é realizada com base em um conjunto de imagens já rotuladas, ao qual chamaremos de conjunto de treinamento ou, equivalentemente, conjunto das memórias fundamentais. Nesta seção, descreveremos os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho da GEB-FAM considerando a base de imagens faciais AR [17]. Especificamente, consideramos alguns dos experimentos descritos por Luo et al. [16].

Consideramos um conjunto de memórias fundamentais composto por $p = 960$ imagens em tons de cinza rotuladas, sendo 8 imagens de cada indivíduo de um grupo de 120 pessoas [17]. Cada imagem, reduzida para dimensão 50×40 , foi associada à um subconjunto fuzzy A^ξ do universo $U = \{1, 2, \dots, 2000\}$. Para cada A^ξ , o conjunto correspondente B^ξ indica a qual pessoa a imagem A^ξ pertence. Especificamente, se A^ξ corresponde à uma imagem da i -ésima pessoa,



Figura 1. Imagens de um indivíduo do conjunto de treinamento.

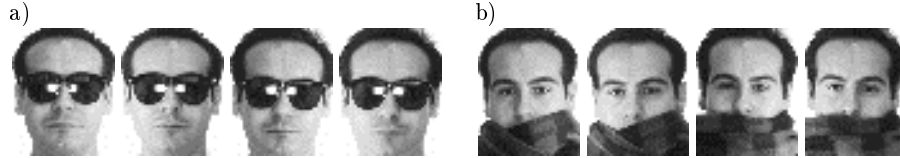


Figura 2. Imagens dos conjuntos de teste dos experimentos: a) óculos+iluminação e b) cachecol+iluminação.

então $B^\xi \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, 120\})$ satisfaz $B^\xi(i) = 1$ e $B^\xi(j) = 0$, para todo $j \neq i$. Em outras palavras consideramos um conjunto de memórias fundamentais dado por: $\{(A^\xi, B^\xi), \xi = 1, \dots, 960\} \subset \mathcal{F}(U) \times \{0, 1\}^{120}$. A Figura 1 mostra as 8 imagens de dimensão 50×40 de um certo indivíduo do conjunto de treinamento.

Foram conduzidos dois experimentos para avaliar o desempenho das GEB-FAMs num problema de reconhecimento facial. No primeiro experimento consideramos como conjunto de teste um conjunto com 4 imagens de cada um dos 120 indivíduos com óculos escuros e iluminação. No segundo experimento, consideramos um conjunto composto por 4 imagens de cada um dos 120 indivíduos com cachecol e iluminação. A Figura 2 mostra imagens do indivíduo da Figura 1 usadas no conjunto de teste dos experimentos: a) óculos+iluminação e b) cachecol+iluminação, respectivamente.

O reconhecimento de faces é realizado da seguinte forma usando uma GEB-FAM. Sejam $\{(A^\xi, B^\xi), \xi = 1, \dots, 960\}$ o conjunto das memórias fundamentais, \mathcal{S} uma medida de similaridade e $\alpha > 0$ um número real. Dada uma imagem de teste X_0 , determinamos o conjunto fuzzy produzido pela GEB-FAM de passo único, isto é, calculamos Y_0 usando (13). Finalmente, associamos a imagem de teste X_0 à i -ésima pessoa, em que i é o primeiro índice tal que $Y_0(i) \geq Y_0(j)$, para todo $j = 1, \dots, 120$. Nos experimentos utilizamos as medidas de similaridade de Gregson e de Eisler e Ekman definidas no Exemplo 1 e consideramos a GEB-FAM obtida definindo $G = C^{-1}$, em que C é dada por (8).

O gráfico apresentado na Figura 3 mostra as porcentagens de acerto obtidas pelas GEB-FAMs para vários valores do parâmetro α . Esses gráficos foram obtidos considerando como conjunto de teste as imagens dos indivíduos com: a) óculos+iluminação e b) cachecol+iluminação.

Observe que as GEB-FAMs apresentaram melhor resultado para valores menores do parâmetro α . Acreditamos que isto pode ser explicado como segue: para

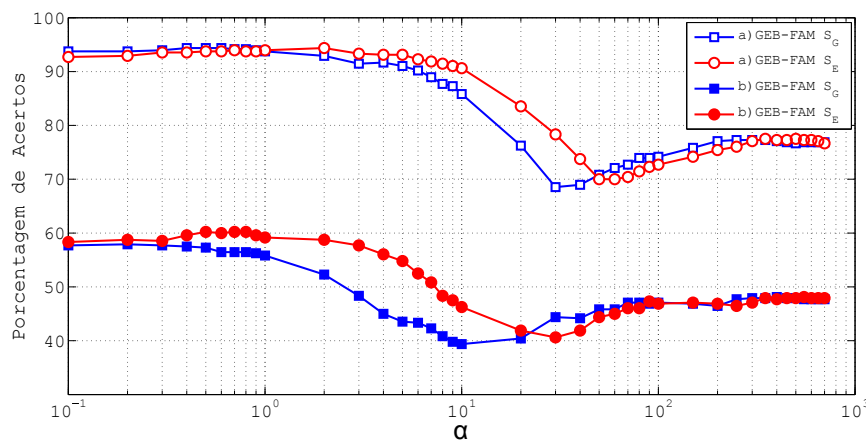


Figura 3. Porcentagem de acertos obtidos pelas GEB-FAMs pelo valor do parâmetro α considerando imagens dos indivíduos com a) óculos+iluminação e b) cachecol+iluminação.

valores muito grandes de α , o peso da memória fundamental mais similar à X_0 , digamos A^n , se torna muito maior que os demais no cálculo de Y_0 . Nesse caso, na grande maioria das vezes, a GEB-FAM associa X_0 à pessoa a qual A^n pertence. No entanto, pode ocorrer que a memória fundamental mais similar a X_0 , A^n , não corresponda a pessoa a qual a imagem de teste X_0 pertence. Para valores menores de α , isto não ocorre. De fato, não apenas a imagem mais similar é efetivamente considerada no cálculo de Y_0 , o que contribui para que os resultados obtidos sejam melhores. Para ilustrar esta observação, consideremos um conjunto de memórias fundamentais composto por 2 imagens de cada indivíduo de um grupo de 30 indivíduos e a medida de similaridade de Gregson. A Figura 4 mostra os pesos $w_{0\xi}^A$ produzidos pela GEB-FAM para os parâmetros $\alpha = 1$ e $\alpha = 500$, respectivamente.

Finalmente, observe também que a GEB-FAM, baseada na medida de similaridade S_G com $\alpha = 1$, forneceu uma taxa de acerto de 93.75% para as imagens de teste com óculos+iluminação e uma taxa de acerto de 55,83% para as imagens de teste com cachecol+iluminação. Além disso, a GEB-FAM baseada na medida de similaridade S_E com $\alpha = 1$, obteve taxas de acerto de 93,96% e 59,17% para as imagens de teste com óculos+iluminação e cachecol+iluminação, respectivamente. A Tabela 1 apresenta a melhor taxa de acerto para cada uma das duas GEB-FAMs. Para efeitos comparativos, a Tabela 1 também contém a taxa de acerto de diversos modelos aplicados ao reconhecimento facial usando a base de dados AR, conforme descrito em [16]. Note que os resultados obtidos pelas GEB-FAMs, apesar de não serem os melhores, são competitivos se comparados aos obtidos pelos outros modelos. Sobretudo, as GEB-FAMs exigem menor custo computacional que a maioria dos outros modelos. Com efeito, os modelos NMR,

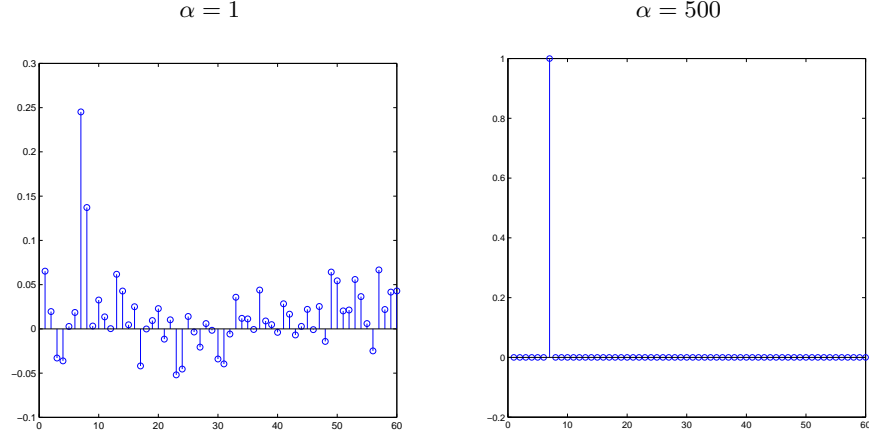


Figura 4. Pesos $w_{0\xi}^A$ produzidos pela GEB-FAM para diferentes valores de α .

SNL₂R2, SNL₁R1, DNL₂R2 e DNL₁R1, que apresentaram as maiores taxas de reconhecimento, são baseado num problema de otimização cuja função objetivo é formulada usando, entre possíveis outros termos, a norma nuclear de uma matriz [16,23].

	LRC	CRC	SRC	CESR	RSC	SSEC	NMR	SNL ₂ R2
a)	90.2	83.3	95.6	93.5	90.6	75.0	94.6	95.7
b)	30.4	54.6	54.8	34.8	39.8	23.1	70.4	70.2

	SNL ₁ R1	DNL ₂ R2	DNL ₁ R1	GEB-FAM \mathcal{S}_G	GEB-FAM \mathcal{S}_E
a)	96.1	95.8	96.7	94.38	94.38
b)	71.2	70.4	72.3	57.92	60.21

Tabela 1. Taxa de acerto de diversos modelos aplicados ao reconhecimento facial usando a base de dados AR.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, inicialmente revisamos brevemente a ECAM e a EBAM, modelos de memórias associativas para o armazenamento e recordação de vetores bipolares. Posteriormente, revisamos as memórias associativas recorrentes exponenciais fuzzy generalizadas, que podem ser vistas como uma versão fuzzy da ECAM. Como principal objetivo, inspirados pela EBAM, introduzimos as memórias associativas bidirecionais exponenciais fuzzy generalizadas (GEB-FAMs).

A motivação para as GEB-FAMs se encontra no fato de muitas aplicações envolverem o armazenamento e recordação de vetores com valores reais ou conjuntos fuzzy. Com efeito, nesse trabalho apresentamos uma aplicação dessas GEB-FAMs a um problema de reconhecimento de faces. Os resultados dos experimentos mostraram que as GEB-FAMs obtiveram um desempenho satisfatório. De fato, as GEB-FAMs atingiram taxas de acerto superiores a 90% para determinados valores do parâmetro α quando consideramos como conjunto de teste as imagens dos indivíduos com óculos escuros e iluminação. No caso em que consideramos como conjunto de teste as imagens dos indivíduos com cachecol e iluminação, as taxas de acerto foram superiores a 55%, para determinados valores de α .

Referências

1. BARROS, L., AND BASSANEZI, R. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Editora do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC-Unicamp), Campinas, 2006.
2. BINH, P., AND HOA, N. Compare effective fuzzy associative memories for grey-scale image recognition. In *Context-Aware Systems and Applications*, P. Vinh, N. Hung, N. Tung, and J. Suzuki, Eds., vol. 109 of *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 258–267.
3. CHIUEH, T., AND GOODMAN, R. Recurrent Correlation Associative Memories. *IEEE Trans. on Neural Networks 2* (Feb. 1991), 275–284.
4. DUBOIS, D., AND PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
5. ESMI, E., SUSSNER, P., BUSTINCE SOLA, H., AND FERNANDEZ, J. Θ -fuzzy associative memories (Θ -FAMs). *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23*, 2 (2015), 313 – 326.
6. HASSOUN, M. H. Dynamic Associative Neural memories. In *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*, M. H. Hassoun, Ed. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
7. HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
8. HASSOUN, M. H., AND WATTA, P. B. Associative Memory Networks. In *Handbook of Neural Computation*, E. Fiesler and R. Beale, Eds. Oxford University Press, 1997, pp. C1.3:1–C1.3:14.
9. HOPFIELD, J., AND TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics 52* (1985), 141–152.
10. HOPFIELD, J. J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences 79* (Apr. 1982), 2554–2558.
11. JENG, Y.-J., YEH, C., AND CHIUEH, T. Exponential bidirectional associative memories. *Electronics Letters 26*, 11 (May 1990), 717–718.
12. KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 2nd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987.
13. KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive Fuzzy Systems for Backing up a Truck-and-Trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks 3*, 2 (1992), 211–223.
14. KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

15. LIU, Q., AND WANG, J. A One-Layer Recurrent Neural Network for Constrained Nonsmooth Optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B* 41, 5 (Oct. 2011), 1323–1333.
16. LUO, L., YANG, J., QIAN, J., AND TAI, Y. Nuclear- l_1 norm joint regression for face reconstruction and recognition with mixed noise. *Pattern Recognition* 48, 12 (2015), 3811 – 3824.
17. MARTINEZ, A. M. The AR face database. *CVC Technical Report 24* (1998).
18. MCELIECE, R. J., POSNER, E. C., RODEMICH, E. R., AND VENKATESH, S. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Information Theory* 1 (1987), 33–45.
19. PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
20. SOUZA, A. C., VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Generalized Recurrent Exponential Fuzzy Associative Memories Based on Similarity Measures. In *Proceedings of the 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA) and the 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT)* (2015), vol. 1, Atlantis Press, pp. 455–462. DOI: 10.2991/ifsa-eusflat-15.2015.66.
21. SUSSNER, P., ESMI, E. L., VILLAVARDE, I., AND GRAÑA, M. The Kosko Subsethood Fuzzy Associative Memory (KS-FAM): Mathematical Background and Applications in Computer Vision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 42, 2–3 (Feb. 2012), 134–149.
22. XUECHENG, L. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. *Fuzzy Sets and Systems* 52, 3 (1992), 305–318.
23. YANG, J., LUO, L., QIAN, J., TAI, Y., ZHANG, F., AND XU, Y. Nuclear norm based matrix regression with applications to face recognition with occlusion and illumination changes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (2016). Accepted for publication.
24. ZWICK, R., CARSTEIN, E., AND BUDESCU, D. V. Measures of Similarity Among Fuzzy Concepts: A Comparative Analysis. *International Journal of Approximate Reasoning* 1, 2 (Apr. 1987), 221–242.