Controle Ótimo Fuzzy com Estado Final Desejado Modelado por um Conceito Linguístico

Michael M. Diniz[1], Luciana T. Gomes[2], Jônathas D. Oliveira[3], e Rodney C. Bassanezi[3]

[1] Instituto Federal de São Paulo, São José dos Campos/SP - Brasil
[2] Departamento de Física, Química e Matemática - UFSCar, Sorocaba/SP - Brasil
[3] Departamento de Física e Matemática- Cefet-MG, Belo Horizonte/MG - Brasil
michael.diniz@ifsp.edu.br,lucianagomes.math@gmail.com,jonathas.math.oliveira@gmail.com,rodney@ime.unicamp.br

Resumo Propomos discutir a viabilidade de diferentes abordagens para um problema de controle ótimo fuzzy. O objetivo é de minimizar o custo e uma função de penalização resultantes da modelagem da situação em que um criador deseja minimizar a quantidade de suplementos usados para aumentar os pesos dos animais de sua criação, mas de modo a aproximar, após determinado tempo fixo, um peso "grande" desejado.

Palavras-chave: Controle ótimo, diferença entre números fuzzy, distância entre conjuntos fuzzy, extensão de Zadeh, conceito linguístico.

1 Introdução

De modo geral, a produção de um determinado animal para o abate envolve um custo que se deseja minimizar, ao mesmo tempo que se almeja maximizar a produção. O preço de venda está baseado no peso (ou tamanho) dos animais. Propomos a modelagem de um problema de controle ótimo, cujo objetivo é controlar o crescimento em peso de um conjunto de animais de modo que no instante de abate seus pesos tenham classificação igual ou superior ao conceito de "grande" (conjunto fuzzy) atribuído ao animal para aquele instante.

O problema de controle ótimo fuzzy já foi considerado em diversas abordagens distintas. Em [5] e [7] por exemplo, a função objetivo e suas restrições são modeladas por funções de pertinência fuzzy, conforme formulação para o problema de tomada de decisão proposta em [3] e [10]. Em [6] e [9], trabalha-se com problemas de controle ótimo baseados em espaços de credibilidade, conceito definido a partir de medidas de credibilidade. Diferentemente das referências citadas, neste trabalho estudamos problema de controle ótimo onde a condição inicial e final são modeladas por números fuzzy. O objetivo é discutir as diversas formulações deste problema, seus possíveis métodos de solução e interpretação. Ressalta-se que pelo fato de a proposta deste trabalho ser diferente das anteriores, é uma área ainda em aberto na literatura e suas dificuldades são provenientes da complexidade do problema de controle ótimo em si em combinação com a questão das diversas possibilidades que a teoria de conjuntos fuzzy oferece em termos de operações e métodos de resolução de problemas.

2 O Problema

Conhecida a equação diferencial que modela o crescimento em peso da espécie em questão e como a alimentação e suplementos interferem neste crescimento, para cada condição inicial se obtém uma solução para a equação diferencial, o que pode ser utilizado para determinar uma curva de crescimento fuzzy através de extensão de Zadeh [8].

O objetivo é fazer com que a curva de crescimento da criação seja a mais eficiente no sentido de satisfazer um peso mínimo, considerado "grande", no tempo fixo de abate/pesca, e que se espera estar relacionado com o ponto de inflexão. Considerando x como sendo o conjunto fuzzy "peso" variando ao longo do tempo t e controlado pela variável u; x_0 a condição inicial fuzzy de estado; x_f o estado final desejado e J a função custo, o problema de controle ótimo assume o formato

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u \in \mathbb{U}} & J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, u)dt \\ \text{s. a} & \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ & x(t_0) = x_0 \quad\quad x(t_f) = x_f. \end{array} \tag{1}$$

3 Abordagens

Possíveis diferentes abordagens levam em conta a interpretação da natureza das variáveis. O estado x representa a distribuição dos pesos da população de animais. Note que este é um conjunto fuzzy, onde cada possível valor de peso de um animal é representado no conjunto "peso dos animais" com determinado grau de pertinência. O grau 1 é associado ao peso mais representativo. O estado final que se deseja alcançar é o conceito "(peso) grande", reforçando a interpretação de conjunto fuzzy para cada estado da população.

A variável custo u, por sua vez, pode ser considerada fuzzy ou não. Se crisp, ela indica que todos os animais da população recebem a mesma quantidade de suplemento $u(t)$ a cada instante de tempo t. Se fuzzy, ela denota que cada indivíduo ingere uma quantidade possivelmente diferente da de outro e que varia de acordo com o peso do animal. A associação é dada pelo grau de pertinência, como em variáveis correlacionadas.

Por envolver em sua fórmula variáveis fuzzy, o custo $J(u)$, pode tanto ser um valor fuzzy quanto um valor crisp, a depender da escolha das operações entre as quantidades fuzzy, como veremos a seguir.

Cada cenário a ser apresentado possui particularidades relacionados à resolução do problema. Em todos os casos, considera-se como solução da equação diferencial fuzzy a extensão da solução da equação diferencial crisp. Aproveitamos para ressaltar que "fuzzy" neste trabalho se relaciona com o conceito de graduação de um conjunto, não com incertezas provenientes de conhecimento parcial (o que poderia ser incluído e enriqueceria enormemente o estudo, porém sua viabilidade é por enquanto questionável).

Vamos discutir os cenários descritos na Tabela 1.

Cenário	Hipóteses	Ferramentas/Propostas
1	$x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	Solução da equação diferencial via extensão;
	$u \in \mathbb{R}$	penalização dada por distância entre conjuntos;
	$J \in \mathbb{R}$	integral da F crisp.
2	$x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	Solução da equação diferencial via extensão;
	$u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	penalização dada por distância entre conjuntos;
	$J \in \mathbb{R}$	integral da F crisp.
3	$x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	Solução da equação diferencial via extensão;
	$u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	penalização dada por diferença entre conjuntos;
	$J \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	integral fuzzy de F.
4	$x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	Solução da equação diferencial via extensão;
	$u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	J obtida através de extensão.
	$J \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$	

Tabela 1. Resumo das possíveis abordagens do problema de controle ótimo fuzzy para crescimento em peso de animais.

Cenário 1. O cálculo de $J(u)$ utiliza a distância entre dois conjuntos (x_{t_f} e x_f), modelando uma penalização dada pela não satisfação da condição final desejada (não imposta), somada à integral de F no tempo. A função F, por sua vez, é dependente apenas de u e portanto sua integral é crisp.

Em geral o controle depende da condição inicial, porém, com controle sendo crisp, não podemos incorporar o *fuzziness* da condição inicial nele, o que dificulta aplicar a extensão de Zadeh. Além disso são desconhecidas condições necessárias e suficientes para este contexto.

Cenário 2. Se a variável de controle é fuzzy, cada indivíduo ingere uma quantidade possivelmente diferente da de outro e que varia de acordo com o peso do animal. O funcional J pode ser obtido com a penalização dada pela distância entre dois conjuntos e a integral pode ser fuzzy, sendo o resultado defuzzificado posteriormente via centro de massa, por exemplo.

Neste caso, uma sugestão seria aplicar a extensão de Zadeh às aplicações que associam a condição inicial à sua solução. Porém, é importante ressaltar que a solução vai depender de como a defuzzificação do funcional é feita. Neste caso também não são conhecidas condições de otimalidade.

Cenário 3. A penalização dada pela não satisfação da condição final pode ser calculada pela diferença de x_{t_f} e x_f, resultando em um número fuzzy. A função F, dependente da variável u, se considerada fuzzy resultará na necessidade do cálculo de uma integral fuzzy e assim teremos o custo J fuzzy.

Caso J coincida com a extensão de Zadeh do caso clássico, pode-se utilizar o método de resolução como no Cenário 4; caso contrário um novo método terá que ser investigado.

Cenário 4. O custo J pode ser obtido via extensão de Zadeh do funcional clássico. Isso se assemelha ao método apresentado em [4], no qual o primeiro autor estabelece uma solução para este problema (sob certas hipóteses) com condição final fixa. Nela, uma ordem parcial é utilizada para comparar números fuzzy e poder verificar que a extensão da solução do problema crisp é a solução do problema fuzzy, fornecendo o menor valor de J.

Para situar a discussão realizada em um apicacão, apresentamos um problema de controle ótimo cuja dinâmica de crescimento em peso $P(t)$ é definida pelo modelo de Von Bertalanfy 2:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u \in \mathbb{U}} & J(u) = d(P(t_f), \widehat{P}_f) + \int_{t_0}^{t_f} a u^2(t) dt \\ \text{s. a} & \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P + \lambda u P \\ & P(t_0) = \widehat{P}_0 \quad P(t_f) = \text{livre.} \end{array} \tag{2}$$

onde $\widehat{P}_0$ e $\widehat{P}_f$ são números fuzzy que modelam respectivamente a distribuição em peso dos animais e o conceito de grande que deseja-se alcançar. O controle $u(t)$ representa a quantidade de suplemento alimentar.

O controle u ser crisp (todos animais recebem a mesma quantidade de suplemento) caracteriza o Cenário 1. Considerar u fuzzy e o funcional crisp, coloca o problema no Cenário 2 e, por fim, u e o funcional J serem fuzzy remete aos Cenários 3 ou 4.

4 Conclusões

O problema de controle ótimo proposto se mostra uma novidade na literatura porque propõe estudar um problema de controle fuzzy onde a condição final é um conceito fuzzy ("grande") que se pretende alcançar, minimizando um custo que pode ser calculado através de diferenças ou distâncias entre conjuntos fuzzy. Considerar a trajetória do conjunto fuzzy "peso da criação" e o estado final fuzzy leva em conta como o peso dos indivíduos da criação estão distribuídos, enquanto que o caso clássico seria apenas uma média, permitindo que informações da distribução do peso da população sejam perdidos.

Referências

1. Barros, L. C., Bassanezi, R. C.: Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática, UNICAMP/IMECC (2006).
2. Bede, B.: Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic, Springer (2013)
3. Bellman, R., Zadeh, L. A.: Decision-making in a fuzzy environment, Management science, Informs, 17, 141–164 (1970)
4. Diniz, M., Otimização de Funções, Funcionais e Controle Fuzzy. Tese de doutorado. UNICAMP/IMECC, Campinas (2016)
5. Filev, D., Angelov, P.: Fuzzy optimal control, Fuzzy Sets and Syst., 47, 151–156 (1992)
6. Ge, X., Zhu, Y.: A necessary condition of optimality for uncertain optimal control problem. Fuzzy Optimization and Decision Making. 12, 41–51 (2013)
7. Sakawa, M., Inuiguchi, M., Kato, K., Ikeda, T.: A fuzzy satisficing method for multiobjective linear optimal control problems. Fuzzy sets and systems. 78, 223–229 (1996)
8. Zadeh, L. A.: Information and control. World Scientific 338-353 (1965)
9. Zhu, Yuanguo: A fuzzy optimal control model. Journal of uncertain systems. 4, 270–279 (2009)
10. Zimmermann, H-J: Applications of fuzzy set theory to mathematical programming. Information sciences. 36, 29–58 (1985)