Um estudo sobre derivada lateral interativa fuzzy

Francielle Santo Pedro*, Estevão Esmi, and Laécio Carvalho de Barros **

Universidade Estadual de Campinas, IMECC,
Campinas- SP, Brasil
fran.stopedro@gmail.com,eelaureano@ime.unicamp.br,laeciocb@ime.unicamp.br,

Resumo Neste trabalho estudamos o conceito de diferenciabilidade interativa lateral para funções de conjuntos a valores fuzzy. Esse tipo de derivada leva em conta possíveis interatividades locais no processo a ser estudado. Estudamos suas propriedades e apresentamos alguns exemplos.

Keywords: Função de conjuntos a valores fuzzy, Interatividade, Derivada Interativa, Derivada lateral.

1 Introdução

Existem ao menos dois tipos de teoria de equações diferenciais fuzzy (EDFs) na literatura. A primeira, introduzida por Puri e Ralescu ([1]), foi originada a partir da derivada de Hukuhara para multifunções. Este primeiro tipo é utilizado para derivar funções com valores fuzzy (processos fuzzy), isto é uma função que associa um número fuzzy para cada número real do domínio. Sendo esta a mais difundida atualmente (ver [2], [3], [4] e [5]). Porém, a solução deste tipo de equação diferencial apresenta um "defeito": o aumento do diâmetro ao longo do tempo, que é interpretado como o aumento da incerteza à medida que o tempo passa. Bede e Gal ([6]) melhoraram esse problema abrindo mão da unicidade da solução. O segundo tipo foi introduzido por Hullermeier ([7]) e, em paralelo, por Baidosov ([8]). Sua base teórica é a teoria de inclusões diferenciais e inclusões diferenciais fuzzy (ver [9]). Esse tipo de equação diferencial é utilizada para conjuntos fuzzy de funções. Atualmente, Barros et al. ([10]) apresentaram o conceito de derivada de funções fuzzy a partir da fuzzificação do operador "derivação" aplicado em funções clássicas. Estudos recentes sobre equações diferenciais fuzzy, cujo campo de direções apresenta interatividade ao longo do tempo, pode ser encontrado em [14]. Neste caso, a solução é um processo fuzzy autocorrelacionado. No presente trabalho, a principal novidade é o estudo de derivada lateral para processos fuzzy autocorrelacionados.

2 Conceitos Básicos

Uma distribuição de possibilidade em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto fuzzy J de $\mathbb{R}^n$ com função de pertinência $\mu_J : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo $\mu_J(x_0) = 1$ para algum

* CNPq processo 141085/2014 − 2.
** CNPq processo 305862/2013 − 8.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. A família de distribuição de possibilidade de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{F}_J(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1 *[12] Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $J \in \mathcal{F}_J(\mathbb{R}^2)$. Então μ_J é a distribuição de possibilidade conjunta de A e B se*

$$\max_y \mu_J(x,y) = \mu_A(x) \text{ e } \max_x \mu_J(x,y) = \mu_B(y), \text{ para quaisquer } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, μ_A e μ_B são chamadas de distribuição de possibilidade marginal de J.

Definição 2 *[12] Os números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta J satisfaz a relação $\mu_J(x,y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Caso contrário, são ditos interativos.*

Definição 3 *Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por*

$$\mu_C(x,y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) \tag{1}$$

sendo $\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y)$ a função característica da reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$.

Na literatura as operações aritméticas para números fuzzy são obtidas de operações intervalares, via o teorema de representação de Negoita and Ralescu [13] ou por meio de "distribuições" dos números fuzzy envolvidos. Da mesma forma como é feito em aritmética de variáveis randômicas, é necessario saber *a priori* se as variáveis são independentes (interativas) ou não.

As operações tradicionais de soma (Minkowski) e subtração entre números fuzzy serão denotados por "+" e "−". Tais operações coincidem com aquelas obtidas via princípio de extensão de Zadeh [11].

A seguir apresentamos operações aritméticas a partir de distribuições de possibilidades.

Definição 4 *[12] Sejam A e B dois números fuzzy completamente correlacionados.*

- *A soma de dois números fuzzy completamente correlacionados $A +_C B$ é dada pela seguinte função de pertinência*

$$\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1,x_2); \tag{2}$$

- *A subtração de dois números fuzzy completamente correlacionados $A -_C B$ é dada pela seguinte função de pertinência*

$$\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1,x_2). \tag{3}$$

Da Definição 4, obtemos para todo $\alpha \in [0,1]$

–

$$[A +_C B]_\alpha = \overline{\{x_1 + x_2 \in \mathbb{R} / \mu_A(x_1) > \alpha,\ qx_1 + r = x_2\}}$$
$$= (q+1)[A]_\alpha + r. \tag{4}$$

Quando $q = -1$, isto é, A e B são completamente negativamente correlacionados, temos, para todo $\alpha \in [0,1]$, $[A +_C B]^\alpha = 0[A]_\alpha + r$ é um número real. Por outro lado quando $q \neq -1$, $A +_C B$ é um número fuzzy sendo que o conjunto $\{(x_1, x_2) \in [C]_\alpha / x_1 + x_2 = y\}$ consiste em no máximo de um único ponto para qualquer $\alpha \in [0,1]$.

–

$$[A -_C B]_\alpha = \overline{\{x_1 - x_2 \in \mathbb{R} / \mu_A(x_1) > \alpha,\ qx_1 + r = x_2\}}$$
$$= (1-q)[A]_\alpha - r. \tag{5}$$

Quando $q = 1$, isto é, A e B são completamente positivamente correlacionados, temos, para todo $\alpha \in [0,1]$, $[A -_C B]_\alpha = 0[A]_\alpha - r = -r$ é um número real.

Sabendo que na maioria das vezes é difícil conhecer as distribuições de possibilidade conjunta dos números fuzzy envolvidos, foi definido um tipo de número fuzzy que possui as mesmas características que os números fuzzy completamente correlacionados mas não há distribuições de possibilidade envolvida.

Definição 5 *[14] Dois números fuzzy A e B são ditos linearmente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$ tais que seus $\alpha-$níveis satisfaçam $[B]_\alpha = q[A]_\alpha + r$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Neste caso, escrevemos*

$$B = qA + r. \tag{6}$$

Definição 6 *[14] A adição e subtração de números fuzzy linearmente correlacionados A e B são dados, respectivamente, por*

$$[B +_L A]_\alpha = (q+1)[A]_\alpha + r \tag{7}$$

e

$$[B -_L A]_\alpha = (q-1)[A]_\alpha + r \tag{8}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$, estabelecemos que $[B]_\alpha = q[A]_\alpha + r$.

A distância de Pompeiu-Hausdorff $d_\infty : \mathbb{R}^n_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}^n_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, é definida por

$$d_\infty(A, B) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H([A]_\alpha, [B]_\alpha) \tag{9}$$

sendo que d_H é a distância de Pompeiu-Hausdorff para conjuntos em $\mathbb{R}^n$. Se A e B são números fuzzy, isto é, $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, então (9) se torna

$$d_\infty(A, B) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \max\{|a^-_\alpha - b^-_\alpha|, |a^+_\alpha - b^+_\alpha|\}.$$

Neste trabalho estamos supondo que as funções fuzzy são do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ associamos um número fuzzy $f(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e levam em conta possíveis interatividades entre as variáveis. Quando nos referirmos a funções fuzzy contínuas significa contínuidade em relação a métrica d_∞.

3 Derivada Interativa

Definição 7 *[14] Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função com valores fuzzy e para cada h, com valor absoluto suficientemente pequeno, considere J uma distribuição de possibilidade conjunta de $F(t_0 + h)$ e $F(t_0)$ com $t_0 \in [a, b]$. A função F é dita J-diferenciável em t_0 se existe um número fuzzy $D_J F(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) -_J F(t_0)}{h} \tag{10}$$

exista e seja igual a $D_J F(t_0)$, sendo que o limite é na métrica d_∞. Nos pontos extremos de $[a, b]$ considaremos derivada somente de um lado.

Observação 1 *Note que a existência de*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) -_J F(t_0)}{h}$$

é equivalente a existir e serem iguais os seguintes limites

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) -_J F(t_0)}{h}, \ \lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0) -_J F(t_0 - h)}{h}, \\ &\lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0 + h) -_J F(t_0)}{h} \ e \ \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_J F(t_0 - h)}{h}. \end{aligned} \tag{11}$$

Por outro lado, se existe $D_J F(t_0)$ então

$$\begin{aligned} [D_J F(t_0)]_\alpha &= \lim_{h \to 0^+} \frac{[F(t_0 + h) -_J F(t_0)]_\alpha}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[F(t_0) -_J F(t_0 - h)]_\alpha}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{[F(t_0 + h) -_J F(t_0)]_\alpha}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[F(t_0) -_J F(t_0 - h)]_\alpha}{h}, \end{aligned} \tag{12}$$

para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, sendo que os limites em (11) são calculados usando a métrica de Pompeiu-Hausdorff (d_∞).

3.1 Derivada fuzzy linearmente correlacionada

Para o conceito de derivada linearmente correlacionada, o que importa são os α-níveis da diferença $F(t+h)-F(t)$ dados por $[F(t+h)-F(t)]_\alpha = (q-1)[F(t)]_\alpha + r$. Isto é, não é necessário saber a distribuição de possibilidade conjunta.

A derivada enunciada a seguir é indicada para processos fuzzy autocorrelacionados localmente $F : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Isto é, para h com valor absoluto suficientemente pequeno,

$$F(t + h) = q(h)F(t) + r(h), \tag{13}$$

para todo $t \in [a, b]$, $q(h)$, $r(h) \in \mathbb{R}$. Lembre-se que a fórmula acima significa $[F(t + h)]_\alpha = q(h)[F(t)]_\alpha + r(h)$. Isto significa que o valor futuro $F(t + h)$ é linearmente correlacionado com o valor presente $F(t)$, para cada h com valor absoluto suficientemente pequeno.

Definição 8 *[14] Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função a valores fuzzy e para cada h, com valor absoluto suficientemente pequeno, sejam $F(t_0+h)$ e $F(t_0)$ com $t_0 \in [a,b]$ números fuzzy linearmente correlacionados. F é dita L-diferenciável em t_0 se existe um número fuzzy $D_L F(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que o limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h) -_L F(t_0)}{h} \tag{14}$$

exista e seja igual a $D_L F(t_0)$, usando a métrica d_∞. $D_L F(t_0)$ é chamada de derivada fuzzy linearmente correlacionada de F em t_0. Nos pontos extremos de $[a,b]$ consideramos derivada somente de um lado.

Seja $[F(t)]_\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$. A subtração entre $F(t+h)$ e $F(t)$ como em (8), para todo $\alpha \in [0,1]$, é dada por

$$[F(t+h) -_L F(t)]_\alpha =$$

$$\begin{cases} i. \;\; [f_\alpha^-(t+h) - f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t+h) - f_\alpha^+(t)] & \text{se } q(h) \geq 1 \\ ii. \;\; [f_\alpha^+(t+h) - f_\alpha^+(t), f_\alpha^-(t+h) - f_\alpha^-(t)] & \text{se } 0 \leq q(h) \leq 1 \\ iii. \;\; [f_\alpha^-(t+h) - f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t+h) - f_\alpha^+(t)] & \\ \qquad +[f_\alpha^-(t) - f_\alpha^+(t), f_\alpha^+(t) - f_\alpha^-(t)] & \text{se } q(h) < 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Os cálculos acima nos intui o seguinte teorema.

Teorema 1 *[14] Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ L-diferenciável em t_0 e $F_\alpha(t_0) = [F(t_0)]_\alpha = [f_\alpha^-(t_0), f_\alpha^+(t_0)]$, para $\alpha \in [0,1]$. Então f_α^- e f_α^+ são diferenciáveis em t_0 e para todo $|h| < \delta$, para algum $\delta > 0$*

$$[D_L F(t_0)]_\alpha = \begin{cases} i. \;\; [(f_\alpha^-)'(t_0), (f_\alpha^+)'(t_0)] & se \;\; q(h) \geq 1 \\ ii. \;\; [(f_\alpha^+)'(t_0), (f_\alpha^-)'(t_0)] & se \;\; 0 < q(h) \leq 1 \\ iii. \;\; [(f_\alpha^-)'(t_0), (f_\alpha^-)'(t_0)] & se \;\; q(h) < 0 \end{cases}$$

sendo que $D_L F(t_0)$ é a L-derivada.

Observação 2 *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ser L-diferenciável em $[a,b]$. Então para cada $\alpha \in [0,1]$:*

i. se $q > 1$ o diam$[F(t)]_\alpha$ é uma função crescente (F é expansiva);
ii. se $0 < q \leq 1$ o diam$[F(t)]_\alpha$ é uma função decrescente (F é contrativa);
iii. se $q < 0$ o diam$[F(t)]_\alpha$ é uma função constante.

Exemplo 1 *Seja $F : (0,5] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $F(t) = (-t; t; 2t)$, ou seja, $[F(t)]_\alpha = [t(2\alpha - 1), t(2-\alpha)]$. Vamos calcular a L-derivada no ponto $t_0 = 3$.*

Primeiramente, vamos verificar se a função F é linearmente correlacionda em $t \in (0,5)$. Da igualdade

$$[(t+h)(2\alpha-1), (t+h)(2-\alpha)] = q(h)[t(2\alpha-1), t(2-\alpha)] + r(h),$$

obtemos $q(h) = \dfrac{t+h}{t} > 1$ *e* $r(h) = 0$, *sempre que* $t > 0$. *Portanto,* F *é linearmente correlacionada e, além disso,* F *é expansiva (ver Figura 1).*

Calculemos então a derivada:

$$\begin{aligned} F'_L(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h) -_L F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[h(2\alpha-1), h(2-\alpha)]}{h} \\ &= [2\alpha - 1, 2-\alpha]. \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto, $F'_L(3) = (-1;1;2)$. *Na Figura 2 vemos que* $F'_L(t)$ *é uma função constante, sendo que a região mais escura no gráfico indica maior pertinência.*

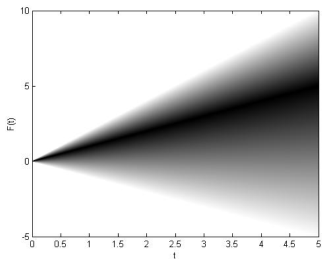

Figura 1. Gráfico de $F(t)$.

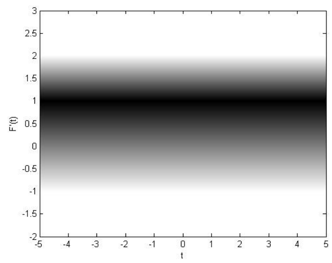

Figura 2. Gráfico de $F'_L(t)$.

A seguir, definimos os conceitos de linearmente correlacionada à direita e à esquerda de um ponto e também derivadas laterais.

Definição 9 *Sejam* $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *uma função a valores fuzzy e* $t_0 \in (a,b)$.

i. *Dizemos que* F *é linearmente correlacionada à direita de* t_0 *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $F(t_0+h)$ *e* $F(t_0)$ *são números fuzzy linearmente correlacionados, para todo* $h \in (0,\delta)$, *isto é,*

$$[F(t_0+h)]_\alpha = q(h)[F(t_0)]_\alpha + r(h).$$

ii. *Dizemos que* F *é linearmente correlacionada à esquerda de* t_0 *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $F(t_0)$ *e* $F(t_0-h)$ *são números fuzzy linearmente correlacionados, para todo* $h \in (0,\delta)$, *isto é,*

$$[F(t_0)]_\alpha = q(h)[F(t_0-h)]_\alpha + r(h).$$

Definição 10 *Sejam* $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *uma função a valores fuzzy e* $t_0 \in (a,b)$.

i. *Se* F *é linearmente correlacionada à direita de* t_0, *então a* L*-derivada à direita de* t_0 *é dada por*

$$F'_{L^+}(t_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h) -_L F(t_0)}{h} \tag{17}$$

ii. *Se F é linearmente correlacionada à esquerda de t_0, então a L-derivada à esquerda de t_0 é dada por*

$$F'_{L^-}(t_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_L F(t_0 - h)}{h} \tag{18}$$

Exemplo 2 *Seja a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por:*

$$F(t) = \begin{cases} (-t; -t; 0; t), \, t \geq 0 \\ (t; 0; -t), \quad t < 0 \end{cases} \Rightarrow [F(t)]_\alpha = \begin{cases} [-t, t - \alpha t], \quad t \geq 0 \\ [t - \alpha t, \alpha t - t], \, t < 0 \end{cases}. \tag{19}$$

A função F é linearmente correlacionada à direita de $t_0 = 0$. Pois, $q(h) = \frac{t+h}{t}$ e $r(h) = 0$ satisfazem

$$[-(t+h), (t+h) - \alpha(t+h)] = q(h)[-t, t - \alpha t] + r(h), \tag{20}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $t > 0$. Além disso, para $h > 0$, $q(h) \geq 1$ e portanto F é expansiva.

A função F também é linearmente correlacionada à esquerda de $t_0 = 0$. Pois, $q(h) = \frac{t-h}{t}$ e $r(h) = 0$ satisfazem

$$[(t-h) - \alpha(t-h), -(t-h) + \alpha(t-h)] = q(h)[t - \alpha, -t + \alpha t] + r(h), \tag{21}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $t < 0$. Além disso, para $h > 0$, $0 < q(h) \leq 1$ e portanto F é contrativa.

Entretanto, F não é linearmente correlacionada em torno de $t_0 = 0$. Pois, não conseguimos exibir $q(h)$ e $r(h)$ que satisfaz

$$[-(1+h), (1+h) - \alpha(1+h)] = q(h)[-(1+h) + \alpha(1+h), 1+h-\alpha(1+h)] + r(h), \tag{22}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Portanto, F não é linearmente diferenciável em $t_0 = 0$ (pois não é linearmente correlacionada, ver Figura 3). Porém, podemos calcular as derivadas laterais de F em $t_0 = 0$ e elas são dadas por

i.

$$\begin{aligned} F'_{L^+}(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h[1, 1-\alpha]}{h} = [1, 1-\alpha]. \end{aligned} \tag{23}$$

Portanto, $F'_{L^+}(0) = (-1; -1; 0; 1)$.

ii.

$$\begin{aligned} F'_{L^-}(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_L F(t_0 - h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h[\alpha - 1, 1-\alpha]}{h} = [\alpha - 1, 1-\alpha]. \end{aligned} \tag{24}$$

Portanto, $F'_{L^-}(0) = (-1; 0; 1)$.

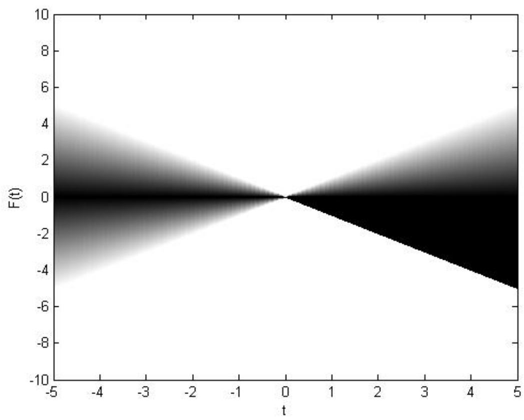

Figura 3. Gráfico de $F(t)$.

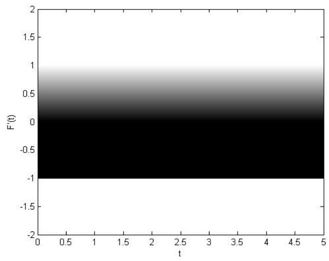

Figura 4. Gráfico de $F^{'}_{L+}(t_0)$.

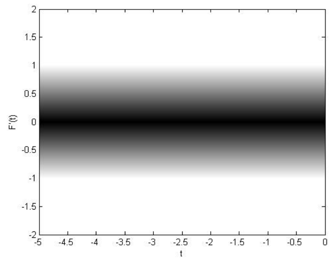

Figura 5. Gráfico de $F^{'}_{L-}(t_0)$.

Nas Figuras 4 e 5, podemos ver o gráfico da L-derivada à direita e à esquerda de $t_0 = 0$, respectivamente.

Observação 3 *Evidentemente, se F é L-diferenciável em t_0 então $F^{'}_{L+}(t_0) = F^{'}_{L-}(t_0)$. Porém, a recíproca nem sempre é válida.*

Uma função linearmente correlacionada F pode ser expansiva (contrativa) à direita (esquerda) de t_0 e contrativa (expansiva) à esquerda (direita) de t_0. O ponto em que esse fenômeno ocorre damos o nome de ponto de troca (*switch point*) e definimos a seguir.

Definição 11 *[15] Dizemos que $t_0 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ é um ponto de troca (switch point) quando para $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0)$ existe a L-diferença com $q \geq 1$ ($0 \leq q \leq 1$) enquanto para $\forall t \in (t_0, t_0 + \delta]$ existe a L-diferença com $0 \leq q \leq 1$ ($q \geq 1$).*

Apontamos que se F é L-diferenciável em todo seu domínio então o ponto de troca em cada nível deverá ocorrer no mesmo tempo, isto é,

$$\frac{d\{diam([F(t)]_\alpha)\}}{dt} = (f_\alpha^-(t) - f_\alpha^+(t))' = 0,$$

no mesmo ponto t para todo $\alpha \in [0,1]$.

Exemplo 3 *Seja $F : [-5,5] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ dada por $F(t) = (-t^2 - 1; 0; 0)$, ou seja, $[F(t)]_\alpha = [-(t^2+1)(1-\alpha), 0]$. Calculemos a L-derivada de F no ponto $t_0 = 0$.*

A função F é linearmente correlacionada. Pois, $q(h) = \frac{(t+h)^2+1}{t^2+1}$ e $r(h) = 0$ satisfazem

$$[-((t+h)^2+1)(1-\alpha), 0] = q(h)[-(t^2+1)(1-\alpha), 0] + r(h),$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $t \in [-5,5]$. Além disso, t_0 é ponto de troca, pois para $h > 0$, $q(h) > 1$ se $t_0 > 0$ e $0 < q(h) < 1$ se $t_0 < 0$. Portanto, F é expansiva à direita de $t_0 = 0$ e contrativa à esquerda de $t_0 = 0$ (ver Figura 6).

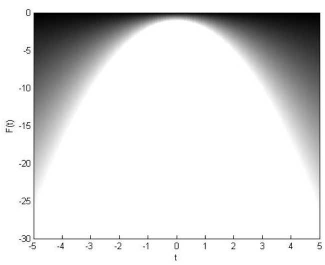

Figura 6. Gráfico de $F(t)$.

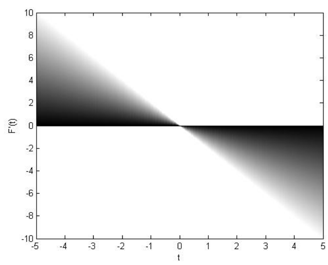

Figura 7. Gráfico de $F_L'(t)$.

As derivadas laterais são

i.

$$\begin{aligned} F_{L^+}'(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0+h) -_L F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[-(2t_0 h + h^2)(1-\alpha), 0]}{h} \\ &= [2t_0(\alpha - 1), 0]. \end{aligned} \tag{25}$$

Portanto, $F_{L^+}'(0) = 0$.

ii.

$$\begin{aligned} F_{L^-}'(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_L F(t_0-h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[0, -(2t_0 h + h^2)(1-\alpha)]}{h} \\ &= [0, -2t_0(1-\alpha)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Portanto, $F_{L^-}'(0) = 0$.

Portanto, $F_L^{'}(0) = 0$. *Na Figura 7 vemos o gráfico da L-derivada da função F em relação a t.*

Exemplo 4 *Seja* $F : [-5, 5] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *dada por* $F(t) = (-1 - t^2; 0; 1 + t^2)$, *ou seja,* $[F(t)]_\alpha = [(1 + t^2)(\alpha - 1), (1 + t^2)(1 - \alpha)]$. *Calculemos a L-derivada de F no ponto* $t_0 = 0$.

A função F é linearmente correlacionada. Pois, $q(h) = \dfrac{(t + h)^2 + 1}{t^2 + 1}$ *e* $r(h) = 0$ *satisfazem*

$$[(1+(t+h)^2)(\alpha-1), (1+(t+h)^2)(1-\alpha)] = q(h)[(1+t^2)(\alpha-1), (1+t^2)(1-\alpha)]+r(h),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ *e* $t \in [-5, 5]$. *Além disso,* t_0 *é ponto de troca, pois para* $h > 0$, $q(h) > 1$ *se* $t_0 > 0$ *e* $0 < q(h) < 1$ *se* $t_0 < 0$. *Portanto, F é expansiva à direita de* $t_0 = 0$ *e contrativa à esquerda de* $t_0 = 0$ *(ver Figura 8).*

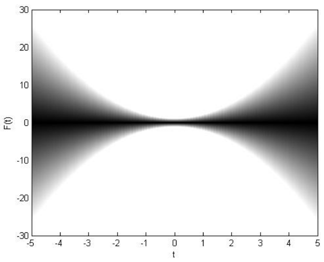

Figura 8. Gráfico de $F(t)$.

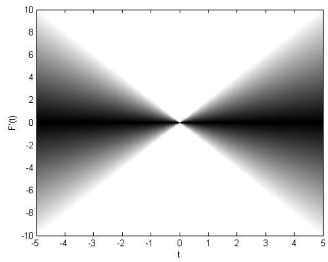

Figura 9. Gráfico de $F_L^{'}(t)$.

As derivadas laterais são:

i.

$$\begin{aligned} F_{L^+}^{'}(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[(2t_0 h + h^2)(\alpha - 1), (2t_0 h + h^2)(1 - \alpha)]}{h} \\ &= [2t_0(\alpha - 1), 2t_0(1 - \alpha)]. \end{aligned} \tag{27}$$

Portanto, $F_{L^+}^{'}(0) = 0$.

ii.

$$\begin{aligned} F_{L^-}^{'}(t_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_L F(t_0 - h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[(2t_0 h - h^2)(1 - \alpha), (2t_0 h - h^2)(\alpha - 1)]}{h} \\ &= [-2t_0(\alpha - 1), -2t_0(1 - \alpha)]. \end{aligned} \tag{28}$$

Portanto, $F_{L^-}^{'}(0) = 0$.

Portanto, $F_L^{'}(0) = 0$.

Na Figura 9 podemos ver o gráfico da L-derivada da função F em relação a t.

4 Conclusão

Um problema de valor inicial modela um sistema evolutivo a partir de uma condição inicial. Desse modo, o processo investigado deve levar em conta o passado, isto é, processo com memória. Logo, o operador derivada deve incorporar essas relações entre seus estados. Neste trabalho, estudamos a derivada interativa fuzzy, a saber L-derivada, que expressa estas relações através da interatividade entre seus estados. Focamos, principalmente, nos conceitos de derivadas laterais e apresentamos alguns exemplos.

Referências

1. Puri, M. L., Ralescu, D. A.: Differentials of fuzzy functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications 91.2, 552–558 (1983).
2. Kaleva, O.: Fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 24.3, 301-317 (1987).
3. Kaleva, O.: A note on fuzzy differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 64.5, 895-900 (2006).
4. Vorobiev, D., Seikkala, S.: Towards the theory of fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems, 125.2, 231-237 (2002).
5. Seikkala, S.: On the fuzzy initial value problem. Fuzzy sets and systems, 24.3, 319-330 (1987).
6. Bede, B., Gal, S. G.: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 151.3, 581-599 (2005).
7. Hullermeier, E.: An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 5.02, 117-137 (1997).
8. Baidosov, V. A.: Fuzzy differential inclusions. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 54.1, 8-13 (1990).
9. Diamond, P.: Stability and periodicity in fuzzy differential equations. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 8.5, 583-590 (2000).
10. Barros, L. C., Gomes, L. T., Tonelli, P. A.: Fuzzy differential equations: an approach via fuzzification of the derivative operator. Fuzzy Sets and Systems, 230, 39-52 (2013).
11. Mizumoto, M., Tanaka, K.: The four operations of arithmetic on fuzzy numbers. Systems Computers and Controls, 7.5, 73-81 (1976).
12. Carlsson, C., Fullér, R.: Additions of completely correlated fuzzy numbers. In Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference on. IEEE, 2004, pp. 535-539.
13. Negoita, C. V., Ralescu, D. A.: Applications of fuzzy sets to systems analysis. New York: Wiley (1975).
14. Barros, L. C., Santo Pedro, F.: Fuzzy differential equations with interactive derivative. Fuzzy Sets and Systems, (2016).

15. Bede, B., Stefanini, L.: Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. Fuzzy Sets and Systems, 230, 119-141 (2013).