Funções Mistura Generalizada Construídas via Funções Mistura Generalizada Limitada

Antonio Diego S. Farias[a,b], Valdigleis S. Costa[a], Regivan Hugo Nunes Santiago[a], and Benjamín Bedregal[a]

[a] Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN,
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - DIMAp
[b] Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA,
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros,
antonio.diego@ufersa.edu.br,
valdigleis@ppgsc.ufrn.br,
regivan@dimap.ufrn.br,
bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo Na literatura existem diversos tipos de funções com a finalidade quantificar uma coleção finita de informações em um único dado, como for exemplo, as funções OWA, as funções mistura, as funções mistura generalizada e as funções mistura generalizada limitada. As funções OWA, são na verdade exemplos de uma classe mais ampla de funções, denominadas de funções de agregação, enquanto que as demais funções citadas nem sempre podem ser classificadas como funções de agregação. Neste trabalho, apresentamos duas generalizações de função mistura, a função mistura generalizada e a função mistura generalizada limitada, com o objetivo de construir funções mistura generalizada partido de funções mistura generalizada limitada.

Keywords: Funções de Agregração; Funções OWA, Funções Mistura, Funções Mistura Generalizada, Funções Mistura Generalizada Limitada

1 Introdução

Algumas classes especiais de funções, denominadas de funções de agregação são amplamente utilizadas pelos Cientistas da Computação, por exemplo, para combinar graus de pertinência de conjuntos difusos [1]. Estas funções tem a capacidade de agrupar coleções finitas de informações, denominadas de entradas, em um único dado, a saída da função.

Funções de agregação, satisfazem certas propriedades especiais, como a monotonicidade, e podem ser aplicadas em diversas áreas, como por exemplo, para identificar tumores [2,3,4], em técnicas de suporte a tratamentos dentários [5,6,7], problemas de tomada de decisão [8,9,10,11,12] e em outros problemas de processamento de imagem [13,1]. A monotonicidade destas funções é uma propriedade bastante importante para algumas aplicações, no entanto, em aplicações como o de processamento de imagens, esta propriedade pode não ser tão importante.

Nesse sentido, Farias *et al.*, [14,15,28] investigaram uma classe de funções denominadas de funções mistura generalizada, que generalizam as noções de OWA [16] e de função mistura [17], e em geral não são monotônicas.

As funções mistura generalizada são funções, que assim como as OWA, são obtidas a partir de pesos. Ao escolhermos um vetor de pesos (i.e., um $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in [0,1]^n$, com $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$), estabelecemos uma função $\mathsf{OWA}_{\mathbf{w}}$. Em outras, uma função OWA é definida a partir de um único vetor de pesos. Já uma função mistura, no caso mais geral, não pode ser definida partindo de único vetor de pesos, estas funções possuem pesos que variam de conformidade com suas entradas, ou seja, para cada entrada $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ obtemos um vetor de pesos $\mathbf{w}(\mathbf{x})$.

De certa forma, isso faz com que em aplicações, os pesos das funções deixem de ser definidos externamente aos algoritmos e passem a ser obtidos pelos internamente aos algorítimos. Com isso, podemos fazer com que os pesos se adequem com as entradas, de acordo com cada necessidade.

Neste artigo, estamos interessados em estabelecer uma correspondência entre as funções mistura generalizada limitada (que são uma forma mais ampla de funções mistura generalizadas) e as funções mistura generalizada. Para isto, estruturemos este trabalho da seguinte forma: Na seção 2, trazemos algumas noções preliminares para o trabalho, como os de função de agregação, funções OWA e funções mistura; Na seção 3 definimos es apresentamos algumas propriedades das funções mistura generalizada e função mistura generalizada limitada, e mostramos a existência de uma correspondência entre estas funções, e provamos alguns resultados; Na seção 4, trazemos as conclusões deste trabalho.

2 Preliminares

Nesta seção discutiremos algumas noções básicas que serão de suma importância para este trabalho.

2.1 Funções de Agregação

Algumas áreas da Ciência da Computação necessitam de instrumentos capazes de traduzir um conjunto informações em um único dado. Uma importante ferramenta capaz de realizar estes processos, cuja definição apresentamos a seguir, é denominada de **Função de Agregação** [18,19].

Definição 1 *Uma função de agregação n-dimensional é uma função* $A : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(A1) $A(0, \cdots, 0) = 0$ *e* $A(1, \cdots, 1) = 1$*;*
(A2) $A(x_1, \cdots, x_n) \leq A(y_1, \cdots, y_n)$*, sempre que* $x_i \leq y_i$ *para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Existem uma infinidade de exemplos de funções de agregação, abaixo apresentaremos alguns destes exemplo:

Exemplo 1 *A função* $Max : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dada por:*

$$Max(x_1, \cdots, x_n) = max\{x_1, \cdots, x_n\}$$

Exemplo 2 *A função* $Min : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dada por:*

$$Min(x_1, \cdots, x_n) = min\{x_1, \cdots, x_n\}$$

Exemplo 3 *A função* $Arith : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dada por:*

$$Arith(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemplo 4 *A função* $WAvg : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dada por:*

$$WAvg(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i,$$

onde $(w_1, \cdots, w_n) \in [0,1]^n$ *com* $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Aplicações para funções de agregação podem ser encontradas nas mais diversas áreas, como por exemplo, em Lógica Difusa [20,21,22,1]; em problemas de tomada de decisão [8,9,10,11,12]; em processamento de imagens [13,2,23], e na Engenharia [24].

Além disso, as funções de agregação são classificadas em quatro classes de funções: do tipo **Conjuntivo**; do tipo **Disjuntivo**; do tipo **Média**, e do tipo **Misto**.

Definição 2 *Uma função de agregação* $A : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *é do tipo:*

1. *Conjuntiva, se* $Max(x_1, \cdots, x_n) \leq A(x_1, \cdots, x_n)$*, para todo* $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$*;*
2. *Disjuntiva, se* $A(x_1, \cdots, x_n) \leq Min(x_1, \cdots, x_n)$*, para todo* $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$*;*
3. *Média, se* $Min(x_1, \cdots, x_n) \leq A(x_1, \cdots, x_n) \leq Max(x_1, \cdots, x_n)$*, para qualquer* $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$*;*
4. *Mista, se não pertence a nenhuma da classes de funções anteriores.*

As funções apresentadas nos exemplos 1-4 são do tipo Média. Neste trabalho, estamos interessados em investigar uma subfamília de funções de tipo Média. Por este motivo, não aprofundaremos o estudos sobre as funções Conjuntivas, Disjuntivas e Mistas, maiores detalhes poderão ser encontrados em [18,19].

Uma função (de agregação n-dimensional, por exemplo) pode satisfazer certas propriedades, como:

Definição 3 *Nós dizemos que uma função* $A : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ *(de agregação, por exemplo) satisfaz:*

(IP) *se,* $A(x, \cdots, x) = x$*, para todo* $x \in [0,1]$*;*

($\mathbf{HP_k}$) *se,* $A(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^k \cdot A(x_1, \cdots, x_n)$*, para todos* $\lambda \in [0,1]$ *e* $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$*;*

(NP) *se exite um elemento* $e \in [0,1]$ *tal que* $A(e, \cdots, e, x_i, e, \cdots, e) = x_i$*, para qualquer* $x_i \in [0,1]$ *e toda coordenada* $i \in \{1, \cdots, n\}$*;*

(AP) *se existe um elemento* $a \in [0,1]$ *tal que para todos* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *e* $(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$*, temos que* $A(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) = a$*;*

(SP) *se,* $A(\sigma(\mathbf{x})) = A(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = A(x_1, \cdots, x_n)$*, para qualquer permutação* $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ *and any* $\mathbf{x} \in [0,1]^n$*;*

(SHP) *se para todo* $\lambda \in [-1,1]$ *temos que* $A(x_1 + \lambda, \cdots, x_n + \lambda) = A(x_1, \cdots, x_n) + \lambda$ *(ou* $A(\mathbf{x} + \lambda) = A(\mathbf{x}) + \lambda$*);*

(ZP) *se existe um elemento* $a \in (0,1)$ *tal que para toda coordenada* i *e qualquer* $(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$ *temos que* $A(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) = 0$*;*

(OP) *se existe um elemento* $a \in (0,1)$ *tal que para toda coordenada* i *e* $(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$ *temos que* $A(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) = 1$.

Na Tabela 2.1, apresentamos algumas funções de agregação com suas respectivas propriedades:

Tabela 1. Funções de agregação e suas propriedades

Função	**Propriedades**
Max	**(IP)**, **($\mathbf{HP_1}$)**, **(NP)**, **(AP)**, **(SP)** e **(SHP)**
Min	**(IP)**, **($\mathbf{HP_1}$)**, **(NP)**, **(AP)**,**(SP)** e **(SHP)**
$Arith$	**(IP)**, **($\mathbf{HP_1}$)**, **(SP)** e **(SHP)**
$SBound$[1]	**(IP)**, **($\mathbf{HP_1}$)**, **(SP)** e **(SHP)**
$WAvg$	**(IP)**, **($\mathbf{HP_1}$)** e **(SHP)**
$Prod$[2]	**(NP)**, **(AP)** e **(SP)**
$GMean$[3]	**(AP)** e **(SP)**
$Max(x + y - 1.5, 0)$	**(SP)** e **(ZP)**
$Min(2.5 - x - y, 1)$	**(SP)** e **(OP)**

Na Tabela I mostramos alguns exemplos de funções de agregação com suas propriedades:

2.2 Funções OWA

Uma importante família de funções de agregação do tipo média, foi introduzida por Yager [16], e denominada de função **Ordered Weighted Averagind**, ou simplesmente OWA. Estas funções são estabelecidas a partir de pesos previamente determinados, e suas aplicações podem ser encontradas, por exemplo, em [20,11,13,14].

Definição 4 *Uma função* **Ordered Weighted Averaging** - OWA *é definida por:*

$$\mathit{OWA}_{\mathbf{w}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)},$$

onde $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in [0,1]^n$ *é um vetor de pesos, i.e.,* $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$*, e* $(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}) = Sort(x_1, \cdots, x_n)$ *é a ordenação decrescente do vetor de entrada* $(x_1, \cdots, x_n)$*.*

Exemplo 5 *As funções* Min*,* Max*,* $Arith$ *e* $WAvg$ *são exemplos de função* OWA*, cujos vetores de pesos são respectivamente:*

1. $\mathbf{w} = (0, \cdots, 0, 1)$;
2. $\mathbf{w} = (1, 0, \cdots, 0)$;
3. $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$;
4. $\mathbf{w} = \left(w_{(1)}, \cdots, w_{(n)}\right)$.

Outros exemplos importantes de OWA podem ser encontrados em [14,15]. Além disso, é importante ressaltar algumas propriedades destas funções:

Proposição 1 *Se* $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in [0,1]^n$ *um vetor de pesos, então:*

1. $\mathit{OWA}_{\mathbf{w}}$ *é uma função de agregação, que satisfaz* **(IP)**, **(HP)**, **(SP)** *e* **(SHP)**;
2. $\mathit{OWA}_{\mathbf{w}}$ *é uma função contínua;*
3. $\mathit{OWA}_{\mathbf{w}}$ *satisfaz* **(NP)** *our* **(AP)** *se, e somente se,* $\mathit{OWA}_{\mathbf{w}} = Max$ *ou* $\mathit{OWA}_{\mathbf{w}} = Min$*;*
4. *OWAs são funções do tipo média.*

Como mencionamos anteriormente, as funções OWA de Yager são obtidas a partir de pesos fixados. Desta forma, para aplicar as funções OWA, por exemplo, em imagens, é necessário determinar um vetor de pesos adequado. Esse processo de escolher um vetor de pesos é feito externamente aos algoritmos.

Na literatura, podemos encontrar algumas outras funções que também utilizam pesos, um exemplo disso são as funções Mistura [17], que definimos a seguir.

2.3 Funções Mistura

As funções Mistura são obtidas como uma particularização das médias de Bajraktarevic [17], que são funções do tipo:

$$MB(\mathbf{x}) = g^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i) g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i)}\right),$$

onde $w_i : [0,1] \to [0,+\infty)$ funções de pesos e $g : [0,1] \to (-\infty,+\infty)$ é uma função estritamente monótona.

Quando g é a função identidade, ou seja, $g(t) = t$, obtemos funções Mistura. Em outras palavras, as funções Mistura são da forma:

$$M(\mathbf{x}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(x_i)x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(x_i)}.$$

Não é difícil demonstrar que as funções Mistura são formas generalizadas de OWA. No entanto, estas função, em geral, não são monotônicas.

É importante notar que cada peso $w_i(x_i)$ corresponde ao valor de uma função de uma única variável, ou seja, o peso é valor de uma função w_i, aplicada a i-ésima posição vetor de entrada $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

Pereira, em [25,26] generalizou o conceito de função Mistura, substituindo os pesos como funções da i-ésima posição do vetor de entrada, para funções de todo o vetor de entrada. Estas funções foram então denominada de funções Mistura generalizadas.

3 Função Mistura Generalizada

As funções Mistura Generalizadas, que definimos abaixo, são obtidas a partir de famílias de funções de pesos, conforme segue:

Definição 5 *Uma função Mistura generalizada (ou função* GM*) é uma função* $\mathsf{GM}_\Gamma : [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por:*

$$\mathsf{GM}_\Gamma(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})x_i,$$

onde $\Gamma = \{f_i : [0,1]^n \to [0,1] |\ 1 \leq i \leq n\}$ *é tal que* $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) = 1$.

Exemplo 6 *Novamente, as funções* Min, Max, $Arith$, $WAvg$ *são exemplos de funções* GM*, conforme [14].*

Exemplo 7 *As funções* OWA *de Yager podem ser vistas como uma subclasse de funções* GM*, bastando definir* $f_i(\mathbf{x}) = w_{p(i)}$*, onde* $p : \{1, 2, \cdots, n\}$ *é a permutação tal que* $p(i) = j$ *com* $x_i = x_{(j)}$.

Em outras palavras, o Exemplo 7, garante que as funções GM são uma generalização para as funções OWA de Yager. No entanto, existem funções GM que não OWA, conforme mostramos no exemplo abaixo:

Exemplo 8 *Se* $f_1, f_2 : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *são as funções* $f_1(x,y) = \sin(x) \cdot y$ *e* $f_2(x,y) = 1 - \sin(x) \cdot y$*, então* $\mathsf{GM}(x,y) = (\sin(x) \cdot y) \cdot x + (1 - \sin(x) \cdot y) \cdot y$ *não é uma função* OWA*.*

Obviamente que as funções Mistura também são exemplos de funções GM. Além disso, a função GM definida no Exemplo 8 não pode ser caracterizada como uma função Mistura, visto que os pesos f_1 e f_2 não são funções apenas da coordenadas x e y, respectivamente.

3.1 Função Mistura Generalizada Limitada

Na Definição 5, é exido que $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) = 1$, mas esta condição pode ser relaxada para $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \leq 1$, conforme Farias et. al. [14], com isso, obtêm-se uma outra classe de funções denominada de Funções Mistura Generalizada Limitada.

Definição 6 *Uma função Mistura Generalizada Limitada -* BGM *é uma faunção* BGM$[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *da forma* $\mathsf{BGM}_\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})x_i$*, com* $\Gamma = \{f_i : [0,1]^n \longrightarrow [0,1] | \ 1 \leq i \leq n\}$ *tal que:*

(I) $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \leq 1$*, para todo* $\mathbf{x} \in [0,1]^n$*;*

(II) $\sum_{i=1}^{n} f_i(1, \cdots, 1) = 1$*, para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*.*

Facilmente pode-se mostrar que uma função GM é uma função BGM tal que:

(III) $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) = 1$, para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

Além disso, existem funções BGM que não são funções GM, como por exemplo:

Exemplo 9 *Se* $f_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{n}$*, então* $\mathsf{BGM}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}$*. Assim,* BGM *não é uma função* GM*, visto que para* $x_1, x_2, \cdots, x_n < 1$ *tem-se que* $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) < 1$*.*

É importante ressaltar que, como funções BGM generalizam funções GM, que por sua vez são formas generalizadas de funções OWA, então podemos ver as funções BGM também como forma de generalizar as funções OWA.

Na proposição que segue, apresentaremos algumas propriedades das funções BGM, cujas demonstrações podem ser encontradas em [14].

Proposição 2 *Seja* $\Gamma = \{f_i : [0,1]^n \to [0,1] | \ 1 \leq i \leq n\}$*. Então,*

(i) BGM_Γ *pode não ser uma função de agregação;*

(ii) se Γ *satisfaz a condição (III), então* BGM_Γ *(que nesse caso é também uma função* GM*) é uma função do tipo média;*

(iii) BGM_Γ *satisfaz* **(IP)** *se, e somente se, para todo* $x \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} f_i(x, \cdots, x) = 1$*;*

(iv) Se Γ *satisfaz a condição (III), e* $f_i(x_1 + \lambda, \cdots, x_n + \lambda) = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ *para todo* $x_1, \cdots, x_n \in [0,1]$ *e* $\lambda \in [-1,1]$*, então* BGM_Γ *satisfaz* **(SHP)***;*

(v) Se cada um dos f_i *satisfaz* $(\mathbf{HP_k})$*, então* BGM_Γ *satisfaz* $(\mathbf{HP_{k+1}})$*.*

Como já mencionamos nesse artigo, e ratificamos em (i) da Proposição 2, nem sempre é possível garantir que uma função BGM (ou GM) é também uma função de agregação. Algumas condições para isso ocorra são estudadas em [25,26,27,14]. Além disso, em [14] mostrou-se que as condições estabelecidas em (ii), (iii), (iv) e (v), da Proposição 2, não podem ser removidas.

No Exemplo 9 mostramos que existem funções BGM que não são funções GM. No entanto, a partir de qualquer função BGM dada podemos construir uma função GM, conforme mostraremos a seguir.

Definição 7 *Definimos por $\mathbb{BGM}$ e $\mathbb{GM}$ como, respectivamente, o conjunto de todas as funções BGM e o conjunto de todas as funções GM.*

Observação 1 *$\mathbb{GM}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{BGM}$, i.e., $\mathbb{GM} \subset \mathbb{BGM}$.*

No teorema a seguir mostraremos que o conjunto $\mathbb{BGM}$ está em correspondência com o conjunto $\mathbb{GM}$.

Proposição 3 *Dada uma função BGM, obtida a partir de $\Gamma = \{f_i : [0,1]^n \longrightarrow [0,1] | \ 1 \leq i \leq n\}$, podemos construir uma função GM, dada por:*

$$\mathit{GM}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i(\mathbf{x})x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x})}, & se \ \sum\limits_{j=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \neq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, & caso\ contrário \end{cases}.$$

Em outras palavras, podemos definir uma função $\pi : \mathbb{BGM} \to \mathbb{GM}$ definida por:

$$\pi(\mathit{BGM}_{\Gamma}) = \mathit{GM}_{\Gamma'},$$

onde $\Gamma' = \{f'_i\}$, onde $f'_i : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ é dado por:

$$f'_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i(\mathbf{x})}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x})}, & se \ \sum\limits_{j=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \neq 0 \\ \frac{1}{n}, & caso\ contrário \end{cases}.$$

Demonstração. Basta ver que $\sum\limits_{i=1}^{n} f'_i(\mathbf{x}) = 1$.

Exemplo 10 *No Exemplo 9, temos $f_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{n}$ e $\mathit{BGM}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}$. Assim,*

$$\pi(\mathit{BGM})(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}, & se \ (x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, & caso\ contrário \end{cases}.$$

Proposição 4 *A função $\pi : \mathbb{BGM} \longrightarrow \mathbb{GM}$ é sobrejetiva, com $\pi \circ \pi = \pi$.*

Demonstração. Para mostrar que π é sobrejetiva, basta ver que se $\mathsf{GM}_\Gamma \in \mathbb{GM}$, então $\pi(\mathsf{GM}_\Gamma) = \mathsf{GM}_\Gamma$. Em outras palavras, basta mostra que $\pi|_{\mathbb{GM}} = Id_{\mathbb{GM}}$, e para isso basta observar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f'_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(\mathbf{x})}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x})} = 1.$$

Agora, para mostrar que $\pi \circ \pi = \pi$, veja que $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma) \in \mathbb{GM}$. Portanto, como $\pi|_{\mathbb{GM}} = Id_{\mathbb{GM}}$, segue que

$$\pi(\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)) = \pi(\mathsf{BGM}_\Gamma), \text{ para todo } \mathsf{BGM}_\Gamma \in \mathbb{BGM}.$$

Proposição 5 *Seja $\mathsf{BGM}_\Gamma \in \mathbb{BGM}$. Então, $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)$ satisfaz* **(IP)**.

Demonstração. Pelo item *(iii)* da Proposição 2, temos que $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)$ satisfaz **(IP)** se, e somente se, para todo $x \in [0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f'_i(x, \cdots, x) = 1$, mas

$$\sum_{i=1}^{n} f'_i(x, \cdots, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x, \cdots, x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x, \cdots, x)} = 1,$$

sempre que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x, \cdots, x) \neq 0$, e

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, \cdots, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

no caso em que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x, \cdots, x) = 0$. Portanto, segue-se o resultado esperado.

Proposição 6 *Se $\mathsf{BGM}_\Gamma \in \mathbb{BGM}$ é tal que cada um dos $f_i \in \Gamma$ satisfaz* $(\mathbf{HP_k})$*, então $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)$ satisfaz* $(\mathbf{HP_1})$.

Demonstração. Primeiramente observe que para $\lambda \neq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ se, e somente se, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = 0$ e portanto $f'_i(x_1, \cdots, x_n) = f'_i(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \frac{1}{n}$, sempre que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = 0$. Agora, se $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f'_i(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) &= \frac{f_i(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^k f_i(x_1, \cdots, x_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^k f_j(x_1, \cdots, x_n)} \\ &= \frac{f_i(x_1, \cdots, x_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_1, \cdots, x_n)} = f'(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda \neq 0$, então $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)(x_1, \cdots, x_n)$. No caso $\lambda = 0$, temos que

$$\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)(0x_1, \cdots, 0x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{0 \cdot x_i}{n} = 0 = 0 \cdot \pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)(x_1, \cdots, x_n).$$

Logo, $\pi(\mathsf{BGM}_\Gamma)$ satisfaz $(\mathbf{HP_1})$.

Proposição 7 *Se $BGM_\Gamma \in \mathbb{BGM}$ é tal que $f_i(x_1+\lambda, \cdots, x_n+\lambda) = f_i(x_1, \cdots, x_n)$, para todos $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $x_1, \cdots, x_n \in [0, 1]$, então $\pi(BGM_\Gamma)$ satisfaz* **(SHP)**.

Demonstração. Como $\sum_{i=1}^{n} f'_i(x_1, \cdots, x_n) = 1$, para todos $x_1, \cdots, x_n \in [0, 1]$, se mostramos que $f'_i(x_1+\lambda, \cdots, x_n+\lambda) = f'_i(x_1, \cdots, x_n)$, para todos $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $x_1, \cdots, x_n \in [0, 1]$, o resultado segue do item (iv) da Proposição 2. Para isso, veja que se $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i + \lambda, \cdots, x_n + \lambda) = 0 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, \cdots, x_n)$, então $f'_i(x_i + \lambda, \cdots, x_n + \lambda) = \frac{1}{n} = f'(x_i, \cdots, x_n)$. No outro caso,

$$\begin{aligned} f'_i(x_i + \lambda, \cdots, x_n + \lambda) &= \frac{f_i(x_i + \lambda, \cdots, x_n + \lambda)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_i + \lambda, \cdots, x_n + \lambda)} \\ &= \frac{f_i(x_i, \cdots, x_n)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_i, \cdots, x_n)} \\ &= f'_i(x_i, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

4 Conclusões

Neste artigo, investigamos duas classes especiais de funções: as funções mistura generalizada e as funções mistura generalizada limitada, e mostramos que é possível construir uma função mistura generalizada a partir de uma função mistura generalizada limitada, que em geral são mais simples de serem definidas. Mostramos, que esta forma de construir uma função mistura generalizada partindo de uma função mistura generalizada limitada, preserva algumas propriedades interessantes, como a idempotência e a homogeneidade. Estas duas propriedades são de suma importância nas aplicações. Para o campo processamento de imagens, por exemplo, Paternain *et al.* [13] argumentam que ao aplicar um operador de redução a uma região cujos pixels possuem a mesma intensidade, deve-se obter como resultado um pixel de mesma intensidade e ao aplicar um operador a uma imagem escura, espera-se que o resultado também seja uma imagem escura.

Vale ressaltar que estas funções possuem muitas possibilidades de aplicabilidade, em campos de processamento de imagem [14,28] e de tomada de decisão (trabalho em andamento), por exemplo. Por este motivo, consideramos os estudo destas funções de grande relevância, em especial, este trabalho permitirá estabelecer uma série de funções mistura generalizada, cuja aplicabilidade serão investigadas em trabalhos futuros.

Referências

1. A. D. S. Farias, L. R. A. Lopes, B. C. Bedregal, and R. H. N. Santiago. Closure properties for fuzzy recursively enumerable languages and fuzzy recursive languages. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 31:1795–1806, 2016.
2. R. P. Joseph, C. S. Singh, and M. Manikandan. Brain tumor mri image segmentation and detection in image processing. *International Journal of Research and Tecnology*, 3, 2014.
3. J. Mihailović, A. Savić, J. Bogdanović-Pristov, and K. Radotić. Mri brain tumors images by using independent component analysis. In *Intelligent Systems and Informatics (SISY), 2011 IEEE 9th International Symposium on*, pages 433–435, Sept 2011.
4. S. K. Woo, K. M. Kim, T. S. Lee, J. H. Jung, J. G. Kim, J. S. Kim, T. H. Choi, G. I. An, and G. J. Cheon. Registration method for the detection of tumors in lung and liver using multimodal small animal imaging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 56(3):1454–1458, June 2009.
5. A. J. Solanki, K. R. Jain, and N. P. Desai. Isef based identification of rct/filling in dental caries of decayed tooth. *International Journal of Image Processing*, 7(2):149 – 162, 2013.
6. S. C. Dighe and R. Shriram. Dental biometrics for human identification based on dental work and image properties in periapical radiographs. In *TENCON 2012 - 2012 IEEE Region 10 Conference*, pages 1–6, Nov 2012.
7. Suprijanto, Gianto, E. Juliastuti, Azhari, and L. Epsilawati. Image contrast enhancement for film-based dental panoramic radiography. In *System Engineering and Technology (ICSET), 2012 International Conference on*, pages 1–5, Sept 2012.
8. R. R. Yager, G. Gumrah, and M. Z. Reformat. Using a web personal evaluation tool – pet for lexicographic multi-criteria service selection. *Knowledge-Based Systems*, 24(7):929 – 942, 2011.
9. S.-M. Zhou, F. Chiclana, R. I. John, and J. M. Garibaldi. Type-1 owa operators for aggregating uncertain information with uncertain weights induced by type-2 linguistic quantifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(24):3281 – 3296, 2008. Theme: Fuzzy Intervals and Optimisation.
10. S. J. Chen and C. L Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, volume 375 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, Berlin, 1992.
11. H. Bustince, M. Galar, B. Bedregal, A. Kolesarova, and R. Mesiar. A new approach to interval-valued choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy set applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(6):1150 – 1162, Dec 2013.
12. D. Paternain, A. Jurio, E. Barrenechea, H. Bustince, B. Bedregal, and E. Szmidt. An alternative to fuzzy methods in decision-making problems. *Expert Systems with Applications*, 39(9):7729 – 7735, 2012.
13. D. Paternain, J. Fernandez, H. Bustince, R. Mesiar, and G. Beliakov. Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 261:87 – 111, 2015. Theme: Aggregation operators.

14. A. D. S. Farias, V. S. Costa, L. R. A. Lopes, B. C. Bebregal, and R. H. N. Santiago. A method of image reduction based on a generalized mixture functions. *Preprint submited to IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016.
15. A. D. S. Farias, B. C. Bebregal, and R. H. N. Santiago. Some properties of generalized mixture functions. In *Preprint submited to FUZZ-IEEE 2016*, Vancouver, Canada, 2016.
16. R. R. Yager. Ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183 – 190, 1988.
17. G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo. *A Practical Guide to Averaging Functions*, volume 329 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing.* Springer, 2016.
18. G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, volume 221 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing.* Springer, Berlin, 2007.
19. G. Beliakov, H. Bunstince, and T. Calvo. *A Practical Guide to Averaging Functions*, volume 329 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing.* Springer, Switzeland, 1 edition, 2016.
20. D. Dubois and H. Prade. On the use of aggregation operations in information fusion processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 142(1):143 – 161, 2004. Aggregation Techniques.
21. E. Hancer, B. Xue, M. Zhang, D. Karaboga, and B. Akay. A multi-objective artificial bee colony approach to feature selection using fuzzy mutual information. In *Evolutionary Computation (CEC), 2015 IEEE Congress on*, pages 2420–2427, May 2015.
22. L. Lingling, Z. Xian, H. Pengju, and L. Zhigang. The research on the method of fuzzy information processing. In *System Science, Engineering Design and Manufacturing Informatization (ICSEM), 2012 3rd International Conference on*, volume 2, pages 47–50, Oct 2012.
23. G. Beliakov, H. Bustince, and D. Paternain. Image reduction using means on discrete product lattices. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(3):1070 – 1083, March 2012.
24. X. Liang and W. Xu. Aggregation method for motor drive systems. *Electric Power Systems Research*, 117:27 – 35, 2014.
25. R. A. M. Pereira and G. Pasi. On non-monotonic aggregation: mixture operators. In *Proc. 4th Meeting of the EURO Working Group on Fuzzy Sets (EUROFUSE'99) and 2nd Internat. Conf. on Soft and Intelingent Computing (SIC'99)*, Budapest, Hungary,, 1999.
26. R. A. M. Pereira. The orness of mixture operators: the exponential case. In *Proc. 8th Internat. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'200)*, Madrid, Spain, 2000.
27. R. A. M. Pereira and R. A. Ribeiro. Aggregation with generalized mixture operators using weighting functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1):43 – 58, 2003. Preference Modelling and Applications.
28. A. D. S. Farias, V. S. Costa, R. H. N. Santiago, and B. C. Bebregal. The image reduction process based on generalized mixture functions. In *Preprint submited to NAFIP's 2016*, El Paso, USA, 2016.