

# Uma Análise de Bifurcação de Hopf Fuzzy

Marina T. Mizukoshi and Moisés dos S. Cecconello

<sup>1</sup> Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, Cx Postal 131  
Campus II, Goiânia, Goiás, 74001-970

<sup>2</sup> Universidade Federal do Mato Grosso  
DMAT-ICET, Av. Fernando C. da Costa, 267  
Nova Esperança, Cuiabá, MT, 78060-900  
mtuyako@gmail.com, moiseis@gmail.com

**Abstract.** Neste trabalho consideramos a análise no contexto fuzzy do sistema bidimensional autônomo determinístico com bifurcação de Hopf, quando a condição inicial é um número fuzzy. Para esta finalidade obtemos um conjunto compacto e invariante com um equilíbrio instável e utilizando resultados obtidos em [3] mostramos que o Problema do Valor Inicial com condição inicial fuzzy possui um valor de bifurcação e que o mesmo possui trajetória periódica estável, caracterizando uma bifurcação de Hopf no contexto fuzzy. Para se obter a solução periódica fuzzy utilizamos o Princípio de extensão de Zadeh.

**Keywords:** Hopf, Bifurcação, Extensão de Zadeh, órbitas Periódicas

## 1 Introdução

Considere o Problema do Valor Inicial definido por:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), x(0) = x_0, \quad (1)$$

onde  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $V \subset \mathbb{R}$ . Suponhamos que o Problema do Valor Inicial tenha solução  $\varphi_t(x_0)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A modelagem matemática envolvendo fenômenos naturais através de sistemas dinâmicos pode estar sujeito a incertezas nos parâmetros das equações que o descrevem. Como estudar (1) no contexto fuzzy? Para esta análise, obtemos a equação diferencial fuzzy de (1) da seguinte maneira:

$$\frac{dx}{dt} = \hat{f}(t, x, \mu), X(0) = X_0, \quad (2)$$

onde  $\hat{f} : [0, T] \times \mathcal{F}(U) \times V \rightarrow \mathbb{R}^2$  foi obtida por aplicando o Princípio de extensão de Zadeh na função contínua dada em (1). Além disso,  $X_0$  é um número fuzzy e  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A análise de modelos não lineares envolvem várias teorias para o estudo qualitativo dos mesmos, visto que não existem técnicas gerais para o estudo analítico.

Quando o comportamento qualitativo das soluções dependem da variação de um ou mais parâmetros diz-se que nestes pontos ocorre uma bifurcação. Geralmente as soluções estado estacionários de (1), isto é quando  $f(x, \mu) = 0$ , são estáveis para pequenas perturbações no parâmetro  $\mu$ . No entanto, quando para um determinado valor de  $\mu = \bar{\mu}$  ocorre uma mudança de estabilidade para instabilidade ou vice-versa considerando valores para  $\mu$  antes e depois de  $\bar{\mu}$ , dizemos que o mesmo é um valor de bifurcação. No contexto determinístico temos uma bifurcação de Hopf quando a mudança de estabilidade faz surgir uma órbita periódica.

Para sistemas dinâmicos não lineares fuzzy, o assunto se torna um tanto mais complexo, pois a evolução da função de pertinência da solução não é obtida facilmente de forma analítica. Hong e Sun [1] propuseram o estudo do valor de bifurcação de sistemas fuzzy utilizando aplicações celulares generalizadas, via a extensão de Zadeh. Em [7] definimos o conceito de valor de bifurcação para (2), verificamos alguns resultados sobre as condições de existência de tais valores de bifurcações e finalizamos por mostrar que o estudo dos valores de bifurcações levam a uma análise completa do comportamento das soluções fuzzy. Em [8], estudamos a bifurcação que ocorre em modelos com condição inicial e parâmetro dados por subconjuntos fuzzy.

Neste trabalho estudamos a bifurcação de Hopf em um sistema bidimensional dada em sua forma normal estabelecido na literatura clássica da teoria de bifurcação [2], com condição inicial fuzzy. Primeiramente, definiremos a bifurcação de Hopf no contexto fuzzy e mostraremos que (1) no contexto fuzzy possui bifurcação de Hopf em  $\chi_{\{\mu=0\}}$ , isto é, a variação de  $\chi_{\{\mu=0\}}$  provocará mudança de estabilidade, fazendo surgir uma órbita periódica fuzzy. Finalizamos o trabalho com uma aplicação na economia.

## 2 Conceitos Introdutórios

### 2.1 Bifurcação de Hopf Determinística

Consideremos o sistema tempo contínuo a um parâmetro

$$x'(t) = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

onde  $f$  é uma função suave em relação a  $x$  e  $\mu$ .

Seja  $x = \bar{x}$  um ponto de equilíbrio hiperbólico, então pequenas variações no parâmetro  $\mu$  podem manter o equilíbrio hiperbólico ou modificá-lo. A priori, existem duas maneiras de modificar a hiperbolicidade, o autovalor é real e se aproxima de zero ou o autovalor é imaginário puro e atinge o eixo imaginário para algum valor de  $\mu$ . Neste caso, dizemos que o equilíbrio não-hiperbólico é estruturalmente instável.

**Definition 1.** *Diz-se que para o parâmetro  $\mu = \mu_0$  ocorre uma bifurcação de Hopf quando o equilíbrio na origem para  $\mu < \mu_0$  é estável(ou instável), mas para  $\mu > \mu_0$ , torna-se instável(estável), fazendo surgir uma órbita periódica.*

Consideremos o seguinte sistema bidimensional de equações diferenciais a um parâmetro:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f(x_1, x_2) \\ x_2'(t) = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4)$$

Temos que o sistema admite equilíbrio na origem com a seguinte matriz jacobiana:  $J(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$

Na forma normal (ver detalhes, em [2]), a bifurcação de Hopf pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ g_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

onde  $\omega = \sqrt{\det J(\mu_0)}$ .

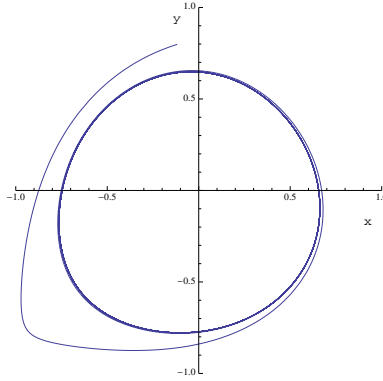
A seguir um Teorema que caracteriza a bifurcação de Hopf.

**Theorem 1.** [2] *Suponha que (4) possui um ponto crítico  $(\bar{x}, \mu_0)$  na origem e que a matriz Jacobiana  $J(\mu)$  tem somente um par de autovalores imaginários puros  $\lambda(\mu_0) = \pm iw(\mu_0)$  tal que a parte real do autovalor,  $\alpha(\mu_0)$ , em  $\mu_0$  é zero, mas  $w(\mu_0) \neq 0$ , então:*

1.  $\mu = \mu_0$  é um ponto de bifurcação;
2. se  $a < 0$  a origem é um foco estável para  $\mu < 0$ , mas para  $\mu > 0$ , torna-se instável e surge uma órbita limite. Se  $a > 0$ , a origem é instável para  $\mu > 0$ , torna-se estável para  $\mu < 0$  e surge uma órbita periódica (veja Fig. 1), onde:

$$a = \frac{1}{16} [f_{x_1x_1x_1} + f_{x_1x_2x_2} + g_{x_1x_1x_2} + g_{x_2x_2x_2}] + \frac{1}{16\omega} [f_{x_1x_2}(f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2})]$$

$$- \frac{1}{16\omega} [g_{x_1x_2}(g_{x_1x_1} + g_{x_2x_2}) - f_{x_1x_1}g_{x_1x_1} + f_{x_2x_2}g_{x_2x_2}]$$



**Fig. 1.** Existência de ciclo limite para o valor de bifurcação  $\mu = 0$ .

A seguir o Teorema de Poincaré Bendixon que garante a existência de solução periódica.

**Theorem 2.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto compacto e  $x_0 \in K$ . Se  $K$  é invariante então  $\omega(x_0) \subset K$  é um ponto de equilíbrio ou é um ciclo limite.*

## 2.2 Soluções Periódicas Fuzzy

A seguir, são apresentados alguns resultados encontrados em [3] que caracterizam soluções periódicas fuzzy necessários para o estudo da bifurcação de Hopf no contexto fuzzy. Utilizando o Teorema de Poincaré Bendixon, podemos observar que uma maneira de determinar se um sistema dinâmico fuzzy admite solução periódica é encontrar uma região compacta, invariante e que não contém ponto de equilíbrio ou que apresente um ponto de equilíbrio instável.

O  $\alpha$ -nível de um subconjunto fuzzy  $U$  é definido por:

$$[U]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \geq \alpha\};$$

O suporte de  $U$  é o conjunto

$$\text{supp } U = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : U(x) > 0\}} = [U]^0;$$

Denotaremos por  $\mathcal{E}(U)$  o espaço de todos os subconjuntos fuzzy compactos não vazios de  $U \subset \mathbb{R}^n$ , cujo  $\alpha$ -níveis são conjuntos compactos e convexos em  $\mathbb{R}^n$ .

Os subconjuntos fuzzy de  $\mathcal{E}(U)$  serão denotados por letras minúsculas em negrito.

A métrica sobre  $\mathcal{E}(U)$  é dada por

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha),$$

onde  $d_H$  é a métrica usual de Pompeiu-Hausdorff definida para subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ . Esta métrica torna  $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d_\infty)$  em um espaço métrico completo [9].

Zadeh propôs o princípio de extensão, o qual se tornou uma ferramenta importante dentro da teoria de conjuntos. A ideia é que cada função,  $f : X \rightarrow Y$ , induz uma função correspondente  $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  (i.e.,  $\hat{f}$  é uma função que aplica conjuntos fuzzy em  $X$  em conjuntos fuzzy em  $Y$ ) definido para cada conjunto fuzzy  $U$  em  $X$  por

$$\hat{f}(U)(y) = \begin{cases} \sup_{u \in f^{-1}(y)} U(u), & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \quad (5)$$

A função  $\hat{f}$  é dita ser obtida através de  $f$  pelo princípio de extensão.

Sejam  $\varphi_t(x_0)$  a solução de  $x'(t) = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  e  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$  a solução obtida pela Extensão de Zadeh aplicado a  $\varphi_t(x_0)$  quando a condição inicial é fuzzy.

**Proposition 1.** *Se  $\gamma$  é uma órbita periódica determinística então o conjunto  $\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_0] \subset \gamma\}$  é um conjunto fechado, limitado e invariante pelo fluxo fuzzy.*

O resultado a seguir estabelece uma relação entre a estabilidade de uma órbita periódica determinística e do conjunto periódico fuzzy obtido através da mesma. No caso bidimensional, utilizando o Teorema de Poincaré Bendixon para o modelo determinístico podemos estabelecer uma órbita periódica fuzzy para o Problema do Valor Inicial fuzzy.

**Theorem 3.** *Sejam  $\gamma$  uma órbita periódica para o fluxo determinístico  $\varphi_t$  com período  $\tau > 0$  e  $\boldsymbol{\gamma} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$  o conjunto periódico fuzzy determinado por  $\gamma$ . Então:*

1.  $\gamma$  é estável para  $\varphi_t$  se, e somente se,  $\boldsymbol{\gamma}$  for estável para  $\hat{\varphi}_t$ ;
2.  $\gamma$  é assintoticamente estável para  $\varphi_t$  se, e somente se,  $\boldsymbol{\gamma}$  for assintoticamente estável para  $\hat{\varphi}_t$ .

**Theorem 4.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto compacto e invariante pelo fluxo determinístico. Se  $K$  não contém pontos de equilíbrio então o conjunto  $\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^2; [\mathbf{x}]^0 \subset K\} \subset \mathbb{R}^2$  contém uma órbita periódica fuzzy.*

**Theorem 5.** *Sejam  $K \subset U$  um conjunto compacto e invariante,  $x_e$  o único ponto de equilíbrio em  $K$  e  $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ . Se  $x_e$  é instável então existe uma região  $A \subset K$  tal que para  $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$ ,  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$  converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Diferentemente do caso determinístico, essa atração não ocorre para todo  $x_0$  com suporte em  $K$ . Isto acontece pois não podemos garantir a existência de uma única órbita periódica determinística em  $K$ . Em [5] são apresentadas algumas aplicações onde a unicidade das órbitas periódicas não ocorre.

**Proposition 2.** *Sejam  $\gamma$  um atrator periódico para o fluxo determinístico,  $V \subset U$  aberto e  $[\mathbf{x}_0]^0 \subset V$ . Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_0), \gamma) = 0$ , para todo  $x_0 \in V$ , então existe um único ponto periódico  $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\gamma}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = 0$ .*

### 3 Bifurcação de Hopf com Condição Inicial Fuzzy

Inicialmente apresentamos alguns conceitos de bifurcação dentro do contexto fuzzy necessários para a compreensão do estudo realizado que podem ser encontrados em ([7]). Posteriormente considera-se a forma normal de 4 da bifurcação de Hopf para um modelo bidimensional e estuda-se no contexto fuzzy, considerando-se o Problema do Valor Inicial associado com a condição inicial fuzzy.

**Definition 2.** *Sejam  $\varphi_t : U \rightarrow U$  e  $\psi_t : V \rightarrow V$  os fluxos definidos por  $\dot{x} = f(x)$  e  $\dot{x} = g(x)$ , respectivamente. As aplicações  $\hat{\varphi}_t : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  e  $\hat{\psi}_t : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  extensões de Zadeh em relação a condição inicial de  $\varphi_t$  e  $\psi_t$ , respectivamente. Então, os fluxos fuzzy  $\hat{\varphi}_t$  e  $\hat{\psi}_t$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $H : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  tal que*

$$H(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)) = \hat{\psi}_t(H(\mathbf{x}_0)).$$

**Definition 3.** *Seja  $\bar{\mu}$  fixado, dizemos que o fluxo fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, \bar{\mu})$  é estruturalmente estável, se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, \mu)$  é topologicamente equivalente a  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, \bar{\mu})$  para todos os valores de  $\mu$  satisfazendo  $\|\mu - \bar{\mu}\| < \varepsilon$ . Um valor de parâmetro  $\mu$  no qual o fluxo fuzzy não é estruturalmente estável, é denominado valor de bifurcação.*

Para (4), considere o Problema do Valor Inicial associado dado por:

$$\begin{cases} x'_1(t) = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x'_2(t) = x_1 + \mu x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x(0) \in \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  é um número fuzzy.

**Theorem 6.** *Suponha que  $\bar{x} = (0, 0)$  seja o único equilíbrio de (4) e que (6) possua um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_e = \chi_{\bar{x}}$  a característica do equilíbrio nulo para todos os valores do parâmetro real  $\mu$ . Além disso, suponhamos que os autovalores de (4) em  $\bar{x} = (0, 0)$  são  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$  tal que  $\lambda(0) = \pm i\omega$ . Então:*

1.  $\mu = 0$ , é um valor de bifurcação de (6);
2. para  $\mu < 0$ , a origem é estável e para  $\mu > 0$ , o equilíbrio  $x_e$  é instável e surge uma rbita periódica fuzzy;
3. existe um único ponto periódico fuzzy  $\mathbf{p}$  tal que a solução fuzzy converge assintoticamente para  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})$ .

**Prova:**

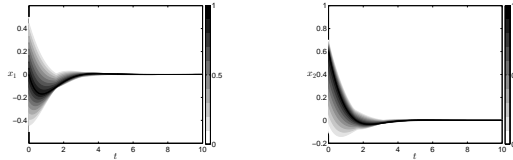
Note que como a origem  $\bar{x} = (0, 0)$  é um equilíbrio para (4) através do fluxo determinístico  $\varphi_t(x_0)$ , então tem-se que  $\chi_{\bar{x}}$  é um equilíbrio de (6) através do fluxo fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ , veja por exemplo ([4]).

Tem-se que a matriz jacobiana referente ao sistema (4) em  $\bar{x} = (0, 0)$  é dada por:  $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$

de maneira que os autovalores são  $\lambda(\mu) = \frac{\mu \pm \sqrt{(\mu)^2 - 4(\mu^2 + 1)}}{2}$ .

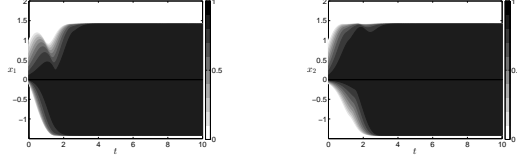
Tem-se então as seguintes conclusões:

- (a) Se  $\mu < 0$ , o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (0, 0)$  de (4) é estável e então  $\chi_{\bar{x}}$  é um equilíbrio estável de (6);



**Fig. 2.** Projeções das soluções assintoticamente estáveis em  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente para  $\mu = -1$  e condições iniciais com suporte  $[-0.5 \ 0 \ 0.5]$ .

(b) Se  $\mu > 0$ , o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de (4) é instável e então  $\chi_{\bar{x}}$  é um equilíbrio instável de (6);



**Fig. 3.** Projeções das soluções instáveis em  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente para  $\mu = 2$  e condições iniciais com suporte  $[-0.1 \ 0 \ 0.1]$ .

Por (a) e (b), segue da Definição 3, que  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação para (6).

(c) Considere um círculo de raio  $\mu$ ,  $\mu > 1/2$ , centrado na origem e um de raio  $1/2$ , isto é,  $K = \{(x_1, x_2) : 1/4 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq r^2, r > 1/2\}$ , então pelo Teorema 2(Poincaré-Bendixson), segue que (4) possui uma trajetória fechada inteiramente contida em  $K$ .

Logo, pelo Teoremas 4 segue que dado o conjunto compacto  $K = \{x \in \mathbb{R}^2; [\mathbf{x}]^0 \subset K\} \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $K$  não contenha  $\bar{x}_e$ , então  $K$  contém uma órbita periódica fuzzy;

(d) Para  $\mu = 0$ , tem-se que existe a matriz  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tal que se  $X = MY$ , a forma normal de (4) é dada por:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2 + \mu y_1 - y_1 y_2^2 - y_1^3 \\ y_2'(t) = y_1 + \mu y_2 - y_1 y_2^2 - y_1^3 \end{cases} \quad (7)$$

Segue do Teorema 1 que  $a = \frac{-1}{2} < 0$ , então a origem é estável para  $\mu < 0$  e instável para  $\mu > 0$ , fazendo com que surja uma órbita periódica estável para (4).

(e) Segue do Teorema 5 e item 2 que existe uma região  $A \subset K$  tal que  $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$ , a solução fuzzy  $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$  converge para uma órbita periódica fuzzy.

A seguir obteremos o período da solução fuzzy, explicitaremos a mesma e mostraremos a convergência assintótica.

Fazendo  $y_1(t) = r(t)\cos(t)$  e  $y_2(t) = r(t)\sen(t)$  em (4) tem-se o seguinte sistema em coordenadas polares:

$$\begin{cases} r'(t) = r(\mu - r^2) \\ \theta'(t) = 1, \end{cases}$$

cuja solução é

$$r(t) = \frac{r_0 \sqrt{\mu}}{[r_0^2 + (\mu - r_0^2)e^{-2t}]^{1/2}}.$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \sqrt{\mu}, \forall p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Temos que  $\|\varphi_t(x_0, y_0)\| = \sqrt{\mu}, \forall t \in \mathbb{R}^+$ , então  $p$  determina a órbita periódica  $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = k\} = \{\sqrt{\mu}, \theta\}; \theta \in [0, 2\pi)\}$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(p_0), \gamma) = 0$ .

Logo, a solução de (4) é uma órbita periódica assintoticamente estável de período  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

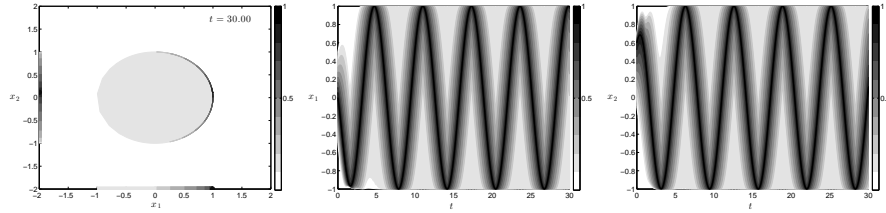
Como  $\gamma$  é assintoticamente estável, segue pela Proposição 2 que o conjunto periódico:

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2); [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$$

é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy  $\hat{\varphi}_t$ .

Além disso, dado  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ , com  $[\mathbf{p}]^0 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$  existe um único ponto  $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\gamma}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = 0$ .

Portanto, em  $\mu = 0$  ocorre um valor de bifurcação de Hopf para (6) e o Problema do Valor Inicial Fuzzy possui uma órbita periódica estável.



**Fig. 4.** Solução fuzzy, projeção na variável  $x_1(t)$  e projeção na variável  $x_2(t)$ , respectivamente para (6) para  $\mu = 1$  e condição inicial fuzzy.

*Example 1.* Considere o seguinte modelo de oferta e demanda:

$$\begin{cases} X_1'(t) = k - aX_1X_2 + \beta X_2 \\ X_2'(t) = aX_1X_2 + \delta X_2, \end{cases} \quad (8)$$

onde  $X_1$  são os potenciais compradores e  $X_2$  nome da marca de um produto;  $a = \alpha X_2$  razão de contato com a propaganda da marca em um instante  $t$ , supondo que seja proporcional ao número de compradores habituais;  $\beta$  é a razão de mudança para a marca rival,  $\varepsilon$  a migração, com  $\delta = \beta + \varepsilon$ . Considere as mudanças de variáveis  $x_1 = (\alpha k / \delta \varepsilon) X_1$ ,  $x_2 = (\varepsilon / k) X_2$ ,  $\tau = \delta t$ ,  $\gamma = \alpha k^2 / \delta \varepsilon^2$ ,  $\Phi = \beta / \delta$ ,  $u = x_1 - 1$ ,  $v = x_2 - 1$ , então (8) é reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} u'(t) = \mu u - \mu \Psi v - \mu g(u, v) \\ v'(t) = u + v + g(u, v), \end{cases} \quad (9)$$

onde  $g(u, v) = 2uv + v^2 + uv^2$  e  $\Psi = \sqrt{2 - \Phi}$ .

Note que a quantidade inicial de potenciais compradores variam, pois os mesmos podem migrar para a compra de produtos de outras marcas e assim é natural pensar que a condição inicial seja fuzzy.



Logo, os autovalores da parte linearizada de (9) são dadas por:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 - \mu \pm \sqrt{(1 - \mu)^2 - 4\mu(\Psi - 1)} \right), \text{ onde para } \mu = 1, \lambda = \pm i\omega, \text{ tal que } \omega = \sqrt{\Psi - 1}.$$

Note que para  $\mu < 1$ , a origem  $\bar{x} = (0, 0)$  é um foco estável, então  $\chi_{\bar{x}}$  é estável para o Problema do Valor Inicial associado a (9) com condição inicial fuzzy.

Por outro lado para  $\mu > 1$  a origem  $\bar{x} = (0, 0)$  é um foco instável, então  $\chi_{\bar{x}}$  é instável para o Problema do Valor Inicial associado a (9) com condição inicial fuzzy.

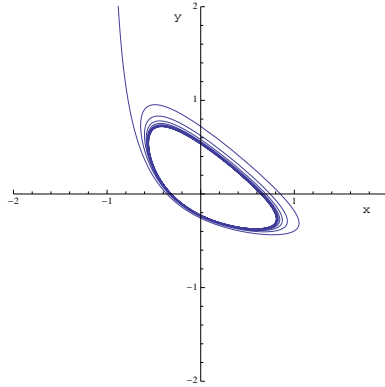
Além disso, a matriz jacobiana de (9) para  $\mu = 1$  é dada por:  $\begin{pmatrix} -1 & \Psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Então, para o autovalor  $\lambda = i\omega$ , obtém-se o autovetor associado ao mesmo de maneira que exista uma matriz  $M = \begin{pmatrix} -1 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tal que a transformação  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  leva a seguinte forma normal:

$$\begin{cases} y_1'(t) = v'(t) = \omega y_2 + h(y_1, y_2) \\ y_2'(t) = \frac{1}{\omega}(u'(t) + v'(t)) = -\omega y_1, \end{cases} \quad (10)$$

onde  $h(y_1, y_2) = -2y_1^2 + 2\omega y_1 y_2 + y_1^2 - y_1^3 + \omega y_2 y_1^3$ , para (9).

Então,  $a = \frac{-10}{16} < 0$ , donde do Teorema 6 segue que para  $\mu > 1$ , a origem é um foco estável, mas para  $\mu < 1$ , a origem torna-se instável e uma órbita periódica surge.



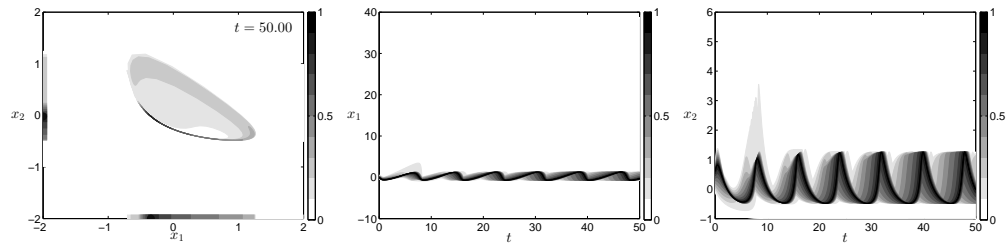
**Fig. 5.** Ciclo limite para  $\mu = 1$  e  $\Phi = 0.1$  para o modelo econômico determinístico.

Considerando a análise de (10) temos regiões onde: ocorrem prosperidade devido ao crescimento do número de compradores e de sucesso na divulgação do produto; (b) decrescimento, devido a situação oposta ao anterior; desaceleração

com o decrescimento de compradores e de divulgação; recuperação quando o número de compradores aumenta mesmo tendo diminuído a propaganda.

Logo para  $\mu = 1$  tem-se uma bifurcação de Hopf para (10). Agora, considerando que em (10) ocorra incerteza relativa ao número de compradores e a efetividade da estratégia de propaganda da divulgação da marca, temos que  $\mu = 1$  é um valor de bifurcação para (10) com condição inicial fuzzy.

Agora, para o Problema do Valor Inicial associado a (9) com condição inicial fuzzy se considerar um conjunto  $K$  nas condições dos Teorema 4 e 5, existe uma órbita periódica fuzzy estável, bastando tomar o suporte da condição inicial em um subconjunto de  $K$ , considerando a pertinência das soluções em cada uma das situações do modelo determinístico com maior ou menor grau para a aceleração ou desaceleração por parte dos consumidores da marca do produto divulgado.



**Fig. 6.** Solução fuzzy, projeção das soluções em  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente para  $\mu = 0$  e a condição inicial fuzzy.

## 4 Conclusão

Neste trabalhos estudamos sistema de equações diferenciais autônomas bidimensionais que possuem bifurcação de Hopf com condição inicial fuzzy, onde o suporte da mesma deverá estar contido em um conjunto compacto do plano, utilizando o princípio de extensão de Zadeh na solução determinística.

Primeiramente, definimos a bifurcação de Hopf no contexto fuzzy e mostramos que (1) no contexto fuzzy possui bifurcação de Hopf em  $\chi_{\mu=0}$ , fazendo surgir uma órbita periódica fuzzy.

Pretendemos estudar o Problema do Valor Inicial com o parâmetro e condição inicial fuzzy.

## References

1. Hong, L. and Sun, J.-Q. Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 11, pp. 1-12, Elsevier(2006).

2. Kuznetsov, Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory, vol.112, Springer, New York (2012).
3. Ceconello, M. S., Leite, J. C., Bassanezi, R. C., Brando,A. V., Periodic orbits for fuzzy flows Fuzzy Sets and systems, vol. 230, 21-38,Elsevier(2013).
4. Ceconello, M. S., Leite, J. C., Bassanezi, R. C., Brandão,A. V., On the stability of fuzzy dynamical systems, Fuzzy Sets and systems, vol. 248, 106-121,Elsevier(2014).
5. Diniz, M. M., Ceconello, M. S., Leite,Teorema de Poincaré-Bendixson no espaço métrico fuzzy  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ . In:XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2012), SBMAC, pp.166-172, Águas de Lindóia(2012).
6. L. A. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its applications in approximate reasoning”, Information Science, (8, 9)(1975), 199-251, 301-357.
7. Mizukoshi, M. T. and Ceconello, M. dos S.: Dynamics and Bifurcations of Fuzzy Solutions. In: NORTH AMERICAN FUZZY INFORMATION PROCESSING SOCIETY. ANNUAL CONFERENCE (NAFIPS 2015) held jointly with 2015 5th World Conference on Soft Computing (WConSC 2015) , pp. 191–196. IEEE Press, New York (2015)
8. Mizukoshi, M. T. and Ceconello, M. dos S.:Dynamics and bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems, submitted.
9. Puri, M. L. and Ralescu, D. A., Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Applied, v. 114, 409-422, 1986.