O Cálculo de Choquet como Ferramenta para Dinâmica de um Modelo Populacional

Beatriz Laiate, Laécio Carvalho de Barros, and Estevão Esmi Laureano

Universidade Estadual de Campinas,
R. Sérgio Buarque de Holanda, 651, Campinas, Brasil
`beatrizlaiate@gmail.com`,
`laeciocb@ime.unicamp.br`,`eelaureano@ime.unicamp.br`
`http://www.ime.unicamp.br/~cbsf4/`

Resumo Neste trabalho utilizamos o conceito de derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy para investigar soluções do modelo de *crescimento logístico* dado por uma equação diferencial. Em simulações preliminares, apresentamos soluções numéricas para diferentes medidas fuzzy.

Keywords: Medida fuzzy, Integral de Choquet, Equação diferencial fuzzy, Crescimento logístico

1 Introdução

Ao propor que na dinâmica de crescimento de uma determinada população deveria ocorrer um processo auto limitante, Verhulst (1838) descreveu o modelo de crescimento logístico através da seguinte equação diferencial: $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$, onde $N = N(t)$ representa a população em questão no instante t, r a taxa de crescimento per capita e K a capacidade de suporte do meio. No caso clássico, se $N(0) = N_0$ é a condição inicial de (1), a solução para o crescimento logístico é dada por: $N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$.

Sugeno [5] sugeriu o conceito de medida fuzzy em 1974 procurando flexibilizar a propriedade de σ - aditividade exigida na teoria de medida clássica.

Definição 1 (Medida Fuzzy) *Uma medida fuzzy (medida não aditiva ou capacidade) μ no espaço de medida $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ denota a σ - álgebra de Borel, é definida como uma função de conjuntos $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ tal que:*

1. *$\mu(A) \leq \mu(B)$ sempre que $A \subseteq B$ e $\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq \ldots,$ então $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$;*
3. *Se$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq Ai \supseteq \ldots,$ então $\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.*

Definição 2 *Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função mensurável. A integral de Choquet de g em $[0, t]$, com relação a uma medida fuzzy μ, é definida por:*

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu \;=\; \int_0^\infty \mu((\tau|g(\tau)\geq r)\cap[0,t])dr.$$

Seja λ a medida de Lebesgue tal que para $[a,b]\subset[0,\infty)$, $\lambda([a,b]) = b-a$.

Definição 3 *Seja $m:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente com $m(0) = 0$. Uma medida fuzzy μ_m, ou medida distorcida de Lebesgue, é definida por*

$$\mu_m(\cdot) \;=\; m(\mu(\cdot)).$$

Sob algumas hipóteses, Sugeno [3] demonstrou que a integral de Choquet de g com relação a uma medida fuzzy μ_m definida acima é dada por:

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{1}$$

Se $f(t)$ representa a integral de Choquet da função g, a relação acima estabelece a equação integral

$$f(t) = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Para uma função contínua e crescente $f(t)$ com $f(0) = 0$, a derivada de f com relação a uma medida fuzzy μ_m é definida como a operação inversa da integral de Choquet baseada em (4), ou seja, $\frac{df(t)}{d\mu_m(t)} = g(t)$.

Assim, a solução do PVI

$$\frac{dx(t)}{d\mu_m(t)} = g(x(t)) \quad \text{com} \quad x(0) = x_0$$

é dada pela equação integral [3]:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t m'(t-\tau)g(x(\tau))d\tau. \tag{3}$$

Note que a equação (3), mesmo para o caso clássico ($m(t) = t$), nem sempre apresenta solução analítica para diversas funções m. Assim, trataremos de propor um método numérico para encontrar uma solução aproximada para (3).

2 Solução numérica

Uma equação diferencial com relação a uma medida fuzzy dada por $\frac{N(t)}{d\mu} = f(N(t))$ possui equação integral equivalente

$$N(t) = N_0 + \int_0^t m'(t-\tau)f(N(\tau))d\tau,$$

com $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ função crescente e $m(0) = 0$.

A representação discreta da equação é:

$$\begin{aligned} N(t_n) &= N_0 + \int_0^{t_n} m'(t-s) f(N(s)) ds \\ &= N_0 + \int_0^{t_1} m'(t-s) f(N(s)) ds + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} m'(t-s) f(N(s)) ds. \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe, para cada $1 \leq i \leq n$ um $c_i \in [t_{i-1}, t+i]$ tal que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} m'(t-s) f(N(s)) ds \;=\; m'(t_i - c_i) f(N(c_i))(t_i - t_{i-1}),$$

onde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ e $t_i - t_{i-1} = h$ representam a partição e a malha do intervalo $[0, t_n]$, respectivamente. Logo, $N(t_n) = N_0 + hm'(t_n - c_1) f(N(c_1)) + \ldots + hm'(t_n - c_n) f(N(c_n))$ que pode ser aproximado por

$$\begin{aligned} N(t_n) &= N_0 + hm'(t_n - t_0) f(N(t_0)) + \ldots + hm'(t_n - t_{n-1}) f(N(t_{n-1})) \\ &= N_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} m'((n-i)h) f(x_i). \end{aligned}$$

3 Simulações para o modelo logístico

Usando o Matlab e considerando o valor dos parâmetros $K = 1$, $N_0 = 0,1$ e $r = 0,01$, as simulações foram feitas variando a lei de formação da função m. Vide as Figuras 1 e 2.

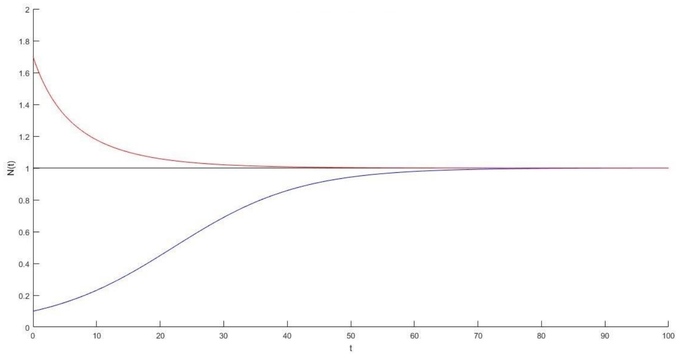

Figura 1. Caso clássico onde $m(t) = t$.

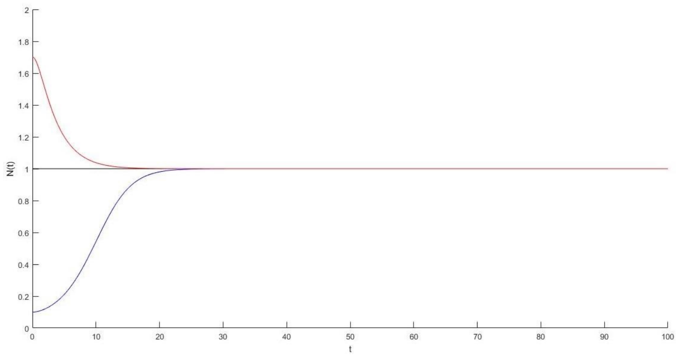

Figura 2. Caso onde $m(t) = log(t + 1)$.

4 Considerações finais

A representação do modelo de crescimento logístico através de uma equação diferencial com relação a uma medida fuzzy possibilita que um espectro de soluções seja produzido de acordo com a escolha da lei de formação da função m. Soluções produzidas quando $1 < O(m(t)) < 2$, onde $O(m(t))$ representa a ordem exponencial de t, possuem uma taxa de variação próxima à da solução clássica. A interpretação dessa variação em termos biológicos deve ser avaliada em estudos futuros, bem como a solução analítica por meio de transformada de Laplace.

Referências

1. BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney Carlos. Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática. Grupo de Biomatemática, Instituto de Mateática, Estatística e Computação Cienífica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2006.
2. MURRAY, James D. Mathematical Biology I: An Introduction, vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics. 2002.
3. SUGENO, Michio. A note on derivatives of functions with respect to fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems, v. 222, p. 1-17, 2013.
4. SUGENO, Michio. A way to choquet calculus. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, v. 23, n. 5, p. 1439-1457, 2015.
5. SUGENO, Michio. Theory of fuzzy integrals and its applications. Tokyo Institute of Technology, 1974.