FUNÇÕES DE AGREGAÇÃO

Benjamín Callejas Bedregal
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Departamento de Informática e Matemática Aplicada – DIMAp
Grupo de Lógica, Linguagens, Informação, Teoria e Aplicações – LoLITA
bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo

O processo de combinar diversos valores numéricos num único valor que de alguma forma represente todos eles é chamado de agregação e a função numérica que realiza este processo é denominada de função de agregação. Quando esses valores são graus de pertinência ou valores verdades num contexto fuzzy (ou de alguma de suas extensões) essas funções de agregação têm que ter certas propriedades. Se consideramos que cada um dos graus de pertinências a serem agregados é resultado da opinião de diversos especialistas ou da aplicação de diversos métodos, então quando esse graus são todos zeros ou todos uns, o resultado da agregação também deve ser zero ou um, respetivamente e além disso quanto maiores os graus de pertinência, maior deve ser o resultado da agregação. É claro que outras condições também podem ser impostas em determinadas circunstâncias, como por exemplo que seja comutativa, idempotente, associativa, etc.

Neste minicurso, veremos diversos tipos de funções de agregação e aplicações em tomada de decisão e processamento digital de imagens (compressão, ampliação e eliminação de ruidos).

1 Introdução

O processo de combinar diversos valores numéricos num único valor que de alguma forma represente todos eles é chamado de agregação e a função numérica que realiza este processo é denominada de função de agregação. Funções de agregação são também chamadas na literatura de operadores de agregação porém quando lidamos com agregação de valores numéricos, do ponto de vista matemático[1], o nome função de agregação parece mais correto que o termo ope-

[1]Operadores em matemática operam sobre objetos mais complexos que simples conjuntos como é o caso de funções.

rador de agregação. Esta definição simples e informal deixa em evidência que funções de agregação têm um grande potêncial de aplicações em diversas áreas de conhecimento, como em matemática aplicada (probabilidade, estatística e teoria de decisão, por exemplo), ciência da computação (por exemplo em inteligência artificial, processamento digital de imagens e algoritmos experimentais), em economia (por exemplo, em análises de risco), etc. Porém quando esses valores são graus de pertinência ou valores verdades num contexto fuzzy (ou de alguma de suas extensões) essas funções de agregação têm que ter certas propriedades. Se consideramos que cada um dos graus de pertinências a serem agregados é o resultado das opiniões de diversos especialistas ou da aplicação de diversos métodos, então quando esses graus são todos zeros ou todos uns, o resultado da agregação também deve ser zero ou um, respetivamente e além disso quanto maiores os graus de pertinência, maior deve ser o resultado da agregação. Ou seja, num contexto fuzzy, uma função de agregação A necessita como mínimo satisfazer as propriedades: $A(0,\ldots,0) = 0$, $A(1,\ldots,1) = 1$ e se $x_i \leq y$ então $A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. É claro que outras condições também podem ser impostas em determinadas circunstâncias, como por exemplo que seja comutativa, idempotente, associativa, etc. As funções de agregação são classificadas em conjuntivas (o resultado sempre é menor ou igual ao menor dos graus de pretinências), disjuntiva (o resultado sempre é maior ou igual ao menor dos graus de pretinências), média (o resultado sempre é um valor que está entre o menor e o maior grau de pretinência de entrada), e híbrido (quando não é nem conjuntivo, nem disjuntivo nem uma média).

Neste minicurso, veremos diversos tipos de funções de agregação conjuntivas (t-normas), disjuntivas (t-conormas), de média (médias baseadas em funções de peso) e híbridas (uninormas) e aplicações em tomada de decisão e processamento digital de imagens, mais especificamente em compressão, ampliação e eliminação de ruidos de imagens.

2 Preliminares

Nesta seção forneceremos algumas definições básicas e notação usada no texto.

1. Dado um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ e $X \subseteq L$, $a \in L$ é um maiorante (minorante) de X se para todo $x \in X$ temos que $x \leq a$ ($a \leq x$).

2. Dado um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ e $X \subseteq L$, o supremo (ínfimo) de X, se existir é o menor dos maiorantes (é o maior dos minorantes). Denotaremos o supremo de X por $\bigvee X$ e o ínfimo por $\bigwedge X$.

3. Quando X é finito, digamos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\bigvee X$ e $\bigwedge X$ também são denotado por $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ e $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, respetivamente.

4. Um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ é um reticulado se todo par de elementos tem um supremo e ínfimo.

5. Um reticulado $\langle L, \leq \rangle$ é limitado se existem elementos $\bot, \top \in L$ tal que para cada $x \in L$, $\bot \leq x \leq \top$.

6. Um reticulado $\langle L, \leq \rangle$ é completo se todo subconjunto de L tem supremo e ínfimo.

7. $[0,1]^n$ denota $\underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-vezes}$.

8. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ defina a função de projeção i-ésima $\pi_i : [0,1]^n \to [0,1]$ por $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

9. Para todo $x \in [0,1]$ a tupla $(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-vezes})$ será denotada por $(x)^n$.

10. Dado $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, denotaremos por $\mathbf{x}_{\nearrow}$ à permutação de $\mathbf{x}$ ordenada de forma crescente, ou seja tal que $\pi_i(\mathbf{x}_{\nearrow}) \leq \pi_{i+1}(\mathbf{x}_{\nearrow})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Analogamente, $\mathbf{x}_{\searrow}$ é a permutação de $\mathbf{x}$ ordenada de forma decrescente.

11. $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

12. $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$.

13. $\lceil x \rceil$ (arredondeamento para acima de x) é menor número inteiro maior ou igual a número real x.

14. $\mathcal{A}|X$ denota a função $\mathcal{A}$ restrita ao conjunto X.

15. sss abrevia "se, e somente se,".

3 Funções de Agregação e Propriedades

No contexto de sistemas fuzzy, funções de agregação são funções que tomam valores reais entre 0 e 1 e retornam como saída um valor nesse mesmo intervalo. Formalmente,

Definição 1. *Seja $n \geq 2$. Uma função $A : [0,1]^n \to [0,1]$ é uma* ***função de agregação de aridade*** *n se $A(0,\ldots,0) = 0$, $A(1,\ldots,1) = 1$ e é crescente, ou seja se $x_i \leq y$ então $A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$.*

Em algumas situações é necessário agregar entradas de vários tamanhos, como por exemplo, agregar as pontuaçãoes dadas por um juri a atletas considerando eventuais abstenções ou inhabilitações (por erros). Do ponto de vista teórico este tipo de situação é abordada considerando uma família de funções de agregação de aridade 2, 3, 4, etc. Isto motiva a seguinte extensão de função de agregação:

Definição 2. *[44] Uma função $\mathcal{A} : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[0,1]^n \to [0,1]$ é uma* ***função de agregação estendida*** *se $\mathcal{A}(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$ e para todo $n \geq 2$, $\mathcal{A}|[0,1]^n$ é uma função de agregação de aridade n.*

Dada uma função de agregação estendida $\mathcal{A}$, em principio não há qualquer relação entre $\mathcal{A}|[0,1]^m$ e $\mathcal{A}|[0,1]^n$ quando $m \neq n$. No entanto, há funções de agregação estendidas, como a média aritmética (definida como $M(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), com uma estreita relação entre as funções de agregação que fazem parte da família. Em particular observamos que a media aritmética satisfaz a propriedade de auto-identidade [69]:

$$M(x_1,\ldots,x_n) = M(x_1,\ldots,x_n,M(x_1,\ldots,x_n)) \tag{1}$$

Esta propriedade é a base a noção de estabilidade de famílias de funções de agregação como discutido em [52]. Observe também que dada uma função de agregação A de aridade 2 podemos obter uma **unção de agregação estendida** $\mathcal{A} : \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[0,1]^n \to [0,1]$ da seguinte maneira:

1. $\mathcal{A}(x) = x$;
2. $\mathcal{A}(x_1,\ldots,x_n) = A(\mathcal{A}(x_1,\ldots,x_{n-1}),x_n)$ para todo $n \geq 2$.

Observe que se A é idempotente, ou seja $A(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$, então $\mathcal{A}$ satisfaz a condição de auto-identidade.

Como de modo geral funções de agregação estendidas são famílias de funções de agregação independentes, aqui só estudaremos as funções de agregação de aridade fixa.

3.1 O reticulado de funções de agregação

Dado um $n \geq 2$, denotaremos por $\mathfrak{A}_{(n)}$ ao conjunto de todas as funções de agregação de aridade n. A seguinte relação binária sobre $\mathfrak{A}_{(n)}$ é uma ordem parcial (não total) para as funções de agregação de aridade n: Seja $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_{(n)}$, então

$$A_1 \leq A_2 \text{ sss para todo } \mathbf{x} \in [0,1]^n, \quad A_1(\mathbf{x}) \leq A_2(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Proposição 1. *$\langle \mathfrak{A}_{(n)}, \leq \rangle$ é um reticulado completo.*

Demonstração: Dado $X \subseteq \mathfrak{A}_{(n)}$, a função $\bigvee X : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por

$$\bigvee X(\mathbf{x}) = \left(\bigvee_{A \in X} \pi_1(A(\mathbf{x})), \ldots, \bigvee_{A \in X} \pi_n(A(\mathbf{x})) \right)$$

é claramente o supremo de X. Dualmente, $\bigwedge X : [0,1]^n \to [0,1]$ definido por

$$\bigwedge X(\mathbf{x}) = \left(\bigwedge_{A \in X} \pi_1(A(\mathbf{x})), \ldots, \bigwedge_{A \in X} \pi_n(A(\mathbf{x})) \right)$$

é o ínfimo de X. $\square$

Observe quando $X = \{A_1, A_2\}$, então

$$A_1 \vee A_2(\mathbf{x}) = (\max(\pi_1(A_1(\mathbf{x})), \pi_1(A_2(\mathbf{x}))), \ldots, \max(\pi_n(A_1(\mathbf{x})), \pi_n(A_2(\mathbf{x}))))$$

Analogamente para $A_1 \wedge A_2$.

Como todo reticulado completo é limitado, existe $A_\perp, A_\top \in \mathfrak{A}_{(n)}$ tal que para todo $A \in \mathfrak{A}_{(n)}$, temos que:

$$A_\perp \leq A \leq A_\top$$

Não é dificil de ver que para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$,

$$\begin{aligned} A_\perp(\mathbf{x}) &= \begin{cases} (1)^n & \text{se } \mathbf{x} = (1)^n \\ (0)^n & \text{senão} \end{cases} \\ A_\top(\mathbf{x}) &= \begin{cases} (0)^n & \text{se } \mathbf{x} = (0)^n \\ (1)^n & \text{senão} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 Função de agregação conjugada e N-dual

Uma função $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ é um automorfismo se for bijetiva e crescente, ou equivalentemente, se for contínua, estritamente crescente e $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$ [6, 12]. Seja $Aut([0,1])$ o conjunto de todos os automorfismos. Observe que a inversa de um automorfismo é tambem um automorfismo. De fato, $\langle Aut([0,1]), \circ, ^{-1}\rangle$ é um grupo.

Proposição 2. *Seja* $A : [0,1]^n \to [0,1]$ *uma função de agregação e* $\varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \to [0,1]$ *dois automorfismos. A função* $A^{\varphi_1,\varphi_2} : [0,1]^n \to [0,1]$ *definida por*

$$A^{\varphi_1,\varphi_2}(\mathbf{x}) = \varphi_1(A(\varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_2(x_n)))$$

é uma função de agregação.

Demonstração: Trivialmente, $A^{\varphi_1,\varphi_2}((0)^n) = \varphi_1(A(\varphi_2(0))^{(n)}) = \varphi_1(A((0)^n)) = \varphi_1(0) = 0$ e $A^{\varphi_1,\varphi_2}((1)^n) = \varphi_1(A(\varphi_2(1))^{(n)}) = \varphi_1(A((1)^n)) = \varphi_1(1) = 1$.

Por outro lado se $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ então $(\varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_2(x_n)) \leq (\varphi_2(y_1), \ldots, \varphi_2(y_n))$ e portanto $A(\varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_2(x_n)) \leq A(\varphi_2(y_1), \ldots, \varphi_2(y_n))$. Logo, $A^{\varphi_1,\varphi_2}(\mathbf{x}) \leq A^{\varphi_1,\varphi_2}(\mathbf{y})$. □

Para todo automorfismo φ, chamamos $A^{\varphi^{-1},\varphi}$ de **conjungada** de A e o denotamos por A^{φ}.

No artigo que deu origem à teoria dos conjuntos fuzzy, ou seja [70], Zadeh define o complemento de um conjunto fuzzy S como sendo o conjunto fuzzy $\overline{S}$ cuja função de pertinência é $\mu_{\overline{S}}(x) = N_Z(\mu_S(x))$ onde $N_Z(x) = 1 - x$ é chamada de negação padrão ou negação de Zadeh. Desde então diversas funções de negação foram proposta e em 1979 Enric Trillas em [57] considera a seguinte definição geral de negação fuzzy a qual é adotada até hoje: Uma função $N : [0,1] \to [0,1]$ é uma **negação fuzzy** se

1. $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;
2. Se $x \leq y$ então $N(y) \leq N(x)$.

Uma negação fuzzy é **forte** se ela é involutiva, ou seja se para todo $x \in [0,1]$, $N(N(x)) = x$. Claramente N_Z é uma negação forte e a negação fuzzy $N(x) = 1 - x^2$ não é forte [5].

Em [57] Trillas da a seguinte caracterização das negações fortes.

Proposição 3. *Seja* $N : [0,1] \to [0,1]$ *uma negação fuzzy.* N *é forte sss existe um automorfismo* φ *tal que* $N = N_Z^{\varphi}$.

Analogamente como acontece com automorfismos, as negações fuzzy também podem ser usadas para gerar novas funções de agregação.

Proposição 4. *Seja $A : [0,1]^n \to [0,1]$ uma função de agregação e $N_1, N_2 : [0,1] \to [0,1]$ duas negações fuzzy. Então a função $A_{N_1,N_2} : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por*

$$A_{N_1,N_2}(\mathbf{x}) = N_1(A(N_2(x_1), \ldots, N_2(x_n)))$$

é também uma função de agregação.

Demonstração: Trivialmente, $A_{N_1,N_2}((0)^n) = N_1(A((N_2(0))^{(n)})) = N_1(A((1)^n)) = N_1(1) = 0$ e $A_{N_1,N_2}((1)^n) = N_1(A((N_2(1))^{(n)})) = N_1(A((0)^n)) = N_1(0) = 1$.

Por outro lado se $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ então $(N_2(y_1), \ldots, N_2(y_n)) \leq (N_2(x_1), \ldots, N_2(x_n))$ e portanto $A(N_2(y_1), \ldots, N_2(y_n)) \leq A(N_2(x_1), \ldots, N_2(x_n))$. Logo, $A_{N_1,N_2}(\mathbf{x}) = N_1(A(N_2(x_1), \ldots, N_2(x_n))) \leq N_1(A(N_2(y_1), \ldots, N_2(y_n))) = A_{N_1,N_2}(\mathbf{y})$.

$\square$

Para toda negação forte N, chamamos $A_{N,N}$ de **função de agregação N-dual** de A e o denotamos por A_N. Quando $A_N = A$ então dizemos que A é auto N-dual.

3.3 Propriedades Extras

A seguir veremos diversas propriedades que algumas funções de agregação podem satisfazer e que podem ser relevantes ou desejáveis em algumas situações. Em toda esta subseção consideraremos uma função de agregação A de aridade n arbitrária.

3.3.1 Idempotência

A é **idempotente** se para todo $x \in [0,1]$ temos que $A((x)^n) = x$.

Proposição 5. *A é idempotente se e somente se para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, temos que $\min \mathbf{x} \leq A(\mathbf{x}) \leq \max \mathbf{x}$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como A é crescente e idempotente então,

$$\min \mathbf{x} = A((\min \mathbf{x})^n) \leq A(\mathbf{x}) \leq A((\max \mathbf{x})^n) = \max \mathbf{x}.$$

($\Leftarrow$) Seja $x \in [0,1]$. Uma vez que A é idempotente e $\min \leq A \leq \max$ então

$$x = \min(x)^n \leq A((x)^n) \leq \max(x)^n = x.$$

Portanto, $A((x)^n) = x$. □

Exemplo 1. A média aritmética, a mediana, o mínimo e o máximo, são funções de agregação idempotentes. Um outro exemplo, é a função

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

conhecida como **media geométrica**.

Proposição 6. *Se A é idempotente então A^φ e A_N são idempotentes para todo automorfismo φ e negação forte N.*

Demonstração: Trivialmente, $A^\varphi((x)^n) = \varphi^{-1}(A((\varphi(x))^n)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ e $A_N((x)^n) = N(A((N(x))^n)) = N(N(x)) = x$. □

3.3.2 Interna

A é **interna** se para todo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$, temos que $A(\mathbf{x}) \in \{x_1, \dots, x_n\}$ [7]. Alguns autores também denominam este tipo de função de agregação de cancelativas, internas locais e seletivas [47].

Claramente toda função de agregação interna é idempotente.

Exemplo 2. As projeções, o mínimo, o máximo e a mediana (quando n é ímpar) são os exemplos mais conhecidos de funções de agregação internas. Outros exemplos são as funções:

$$A_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = (0)^n \\ \pi_{s(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) & \text{senão} \end{cases}$$

onde $s(x_1, \dots, x_n) = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rceil$.

Dado um $\lambda \in [0,1]$ e uma função de agregação A a função

$$A_\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min(\mathbf{x}) & \text{se } A(\mathbf{x}) \leq \lambda \\ \max(\mathbf{x}) & \text{se } A(\mathbf{x}) > \lambda \end{cases}$$

onde $\lambda \in [0,1]$ e A é uma função de agregação A qualquer.

A seguir mostraremos que as funções de agregação internas são fechadas sobre conjugadas e N-dualidade.

Proposição 7. *Seja φ um automorfismo e N uma negação forte. Se A é uma função de agregação interna então A^φ e A_N também são funções de agregação internas.*

Demonstração: Sea $\mathbf{x} \in [0,1]^n$. Então, $A^\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi^{-1}(\varphi(x_i)) = x_i$ para algum $i \in \mathbb{N}_n$. Analogamente, $A_N(\mathbf{x}) = N(A(N(x_1), \ldots, N(x_n)) = N(N(x_i)) = x_i$. □

Observe que, a prova da proposição anterior não demonstra que $A = A^\varphi$ e nem que $A = A_N$, pois a escolha de i em $(A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ pode ser diferente do i escolhido em $A(x_1, \ldots, x_n)$. Por exemplo, se $\varphi(x) = x^2$ então $A_s(0.3, 0.4, 0.5) = 0.4$ enquanto $A_s^\varphi(0.3, 0.4, 0.5) = \sqrt{A(0.09, 0.16, 0.25)} = \sqrt{0.09} = 0.3$. No entanto, em diversas outras funções de agregação internas temos que $A = A^\varphi$ e $A = A_N$ (por exemplo nas projeções, no máximo e no mínimo).

3.3.3 Comutatividade

A é **comutativa** se o resultado não depende da ordem dos argumentos, ou seja se para toda permutação $(p(1), \ldots, p(n))$ de $(1, \ldots, n)$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, temos que $A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(n)})$

Exemplo 3. A média aritmética, o produto ($P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$), a média geometrica, o mínimo, e o máximo são exemplo de funções de agregação comutativas. Dado $i \in \mathbb{N}_n$ a projeção π_i é um exemplo de uma função de agregação não comutativa.

Proposição 8. *Seja A uma função de agregação de aridade n. Então a função $\min_A : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por*

$$\min_A(\mathbf{x}) = \min(A(p_1(\mathbf{x})), \ldots, A(p_k(\mathbf{x}))),$$

onde $\{p_1(\mathbf{x}), \ldots, p_k(\mathbf{x})\}$ é o conjunto de todas as permutações possíveis de $\mathbf{x}$, é uma função de agregação de aridade n comutativa.

Proposição 9. *Seja A um função de agregação de aridade n. Então as funções $A_\nearrow, A_\searrow : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por*

$$A_\nearrow(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_\nearrow) \text{ e } A_\searrow(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_\searrow)$$

são funções de agregação de aridade n comutativa.

Obviamente se A é comutativa então $A = A_{\nearrow} = A_{\searrow}$.

Proposição 10. *Seja A um função de agregação de aridade n comutativa, φ um automorfismo e N uma negação forte. Então A^{φ} e A_N são funções de agregação comutativas.*

3.3.4 Elemento neutro

Um elemento $e \in [0,1]$ é um **elemento neutro** de A se para todo $x \in [0,1]$, $A(e,\ldots,e,x,e,\ldots,e) = x$.

Observação 1. Nem toda função de agregação tem um elemento neutro (por exemplo a média aritmética). Mas, se A tem um elemento neutro então este é único. De fato suponha que e_1 e e_2 são dois elementos neutros. Sem perda de generalidade podemos assumir que $e_1 \leq e_2$. Então por A ser crescente temos que $e_1 = A(e_1, e_2, \ldots, e_2) \geq A(e_1, \ldots, e_1, e_2) = e_2$ e portanto $e_1 = e_2$.

Proposição 11. *Sejam A_1 e A_2 funções de agregação de aridade n com elementos neutros e_1 e e_2 respetivamente. Se $A_1 \leq A_2$ então $e_2 \leq e_1$.*

Demonstração: $e_2 = A_1(e_1,\ldots,e_1,e_2) \leq A_2(e_1,\ldots,e_1,e_2) \leq A_2(e_1,e_2,\ldots,e_2)$ $= e_1$. ☐

Corolário 12. *Se $A \leq \min$ e A tem elemento neutro então 1 é o elemento neutro de A.*

Corolário 13. *Se $A \geq \max$ e A tem elemento neutro então 0 é o elemento neutro de A.*

A seguir mostraremos que seja qual for o valor em $[0,1]$, há pelo menos uma função de agregação com esse valor como elemento neutro.

Exemplo 4. Seja A uma função de agregação de aridade n tal que $\min \leq A \leq \max$. Então dado qualquer $e \in [0,1]$ fixo a função

$$A_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \leq (e)^n \\ \max(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \geq (e)^n \\ A(\mathbf{x}) & \text{senão} \end{cases}$$

é claramente uma função de agregação com e como elemento neutro.

Proposição 14. *Seja A uma função de agregação de aridade n, $e \in (0,1)$ e N uma negação forte. e é um elemento neutro de A sss $N(e)$ é um elemento neutro de A_N.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $x \in [0,1]$. Então por e ser elemento neutro de A temos que, $A_N(N(e),\ldots,N(e),x,N(e),\ldots,N(e)) = N(A(N(N(e)),\ldots,N(N(e)), N(x),N(N(e)),\ldots,N(N(e)))) = N(A(e,\ldots,e,N(x),e,\ldots,e)) = N(N(x)) = x$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in [0,1]$. Então por $N(e)$ ser elemento neutro de A_N e N ser involutiva temos que, $A(e,\ldots,e,x,e,\ldots,e) = N(N(A(N(N(e)),\ldots,N(N(e)), N(N(x)),N(N(e)),\ldots,N(N(e))))) = N(A_N(N(e),\ldots,N(e),N(x),N(e),\ldots, N(e))) = N(N(x)) = x$. □

Proposição 15. *Seja A uma função de agregação de aridade n, $e \in (0,1)$ e φ um automorfismo. Então, e é um elemento neutro de A sss $\varphi^{-1}(e)$ é um elemento neutro de A^φ.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $x \in [0,1]$. Então por e ser elemento neutro de A temos que, $A^\varphi(\varphi^{-1}(e),\ldots,\varphi^{-1}(e),x,\varphi^{-1}(e),\ldots,\varphi^{-1}(e))=\varphi^{-1}(A(\varphi(\varphi^{-1}(e)),\ldots, \varphi(\varphi^{-1}(e)),\varphi(x),\varphi(\varphi^{-1}(e)),\ldots,\varphi(\varphi^{-1}(e))))=\varphi^{-1}(A(e,\ldots,e,\varphi(x),e,\ldots,e))= \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in [0,1]$. Então por $\varphi^{-1}(e)$ ser elemento neutro de A^φ temos que, $A(e,\ldots,e,x,e,\ldots,e) = \varphi(\varphi^{-1}(A(\varphi(\varphi^{-1}(e)),\ldots,\varphi(\varphi^{-1}(e)),\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(e)),\ldots,\varphi(\varphi^{-1}(e))))) = \varphi(A^\varphi(\varphi^{-1}(e),\ldots,\varphi^{-1}(e),\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(e),\ldots, \varphi^{-1}(e))) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$. □

3.3.5 Elemento anilador ou de absorção

Um elemento $a \in [0,1]$ é um **elemento anilador**, também chamado de elemento de absorção, de A se para todo $x_1,\ldots,x_{n-1} \in [0,1]$ e $i \in \mathbb{N}_n$, temos que $A(x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_i,\ldots,x_{n-1}) = a$.

Proposição 16. *Sejam A_1 e A_2 duas funções de agregação de aridade n com elementos aniladores a_1 e a_2, respetivamente. Se $A_1 \leq A_2$ então $a_1 \leq a_2$.*

Demonstração: $a_1 = A_1(a_1,\ldots,a_1,a_2) \leq A_2(a_1,\ldots,a_1,a_2) = a_2$. □

Corolário 17. *Se $A \leq \min$ então 0 é um elemento anilador de A.*

Demonstração: Direto da Proposição anterior, uma vez que 0 é um elemento anilador de $\min$. □

Corolário 18. *Se $A \geq \max$ então 1 é um elemento anilador de A.*

Demonstração: Direto da Proposição anterior, uma vez que 1 é um elemento anilador de $\max$. □

Observe que há funções de agregação com 0 como elemento anilador que são maiores ao mínimo. Por exemplo, a média geométrica. Analogamente, há funções de agregação que têm 1 como elemento anilador que são menores que o máximo. Por exemplo, dada uma função de agregação A tal que $A \leq \max$, então a função:

$$A_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \max(\mathbf{x}) = 1 \\ A(\mathbf{x}) & \text{senão} \end{cases}$$

tem 1 como anilador e é menor que o máximo.

A seguir veremos que para qualquer valor em $[0, 1]$, sempre há pelo menos uma função de agregação com esse valor como elemento anilador.

Exemplo 5. Para qualquer $a \in [0, 1]$ a função

$$A_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = (0)^n \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} = (1)^n \\ a & \text{senão} \end{cases}$$

é uma função de agregação com a como elemento anilador.

Se A é uma função de agregação com elemento anilador $a \in (0, 1)$ então A não possui elemento neutro. De fato, se e for um elemento neutro de A então caso $a < e$ temos que $a = A(0, a \ldots, a) \leq A(0, e, \ldots, e) = 0$ e portanto $a = 0$ que é uma contradição. Analogamente, se $e \leq a$ temos que $1 = A(1, e, \ldots, e) \leq A(1, a, \ldots, a) = a$ e portanto $a = 1$ que é uma contradição.

Proposição 19. *Seja A uma função de agregação de aridade n, N uma negação forte e $a \in [0, 1]$. a é um elemento anilador de A sss $N(a)$ é um elemento anilador de A_N.*

Demonstração: Seja $x_1, \ldots, x_{n-1} \in [0, 1]$.

($\Rightarrow$) Então por a ser elemento anilador de A temos que, $A_N(x_1, \ldots, x_{i-1}, N(a), x_i, \ldots, x_{n-1}) = N(A(N(x_1), \ldots, N(x_{i-1}), N(N(a)), N(x_i), \ldots, N(x_{n-1}))) = N(A(N(x_1), \ldots, N(x_{i-1}), a, N(x_i), \ldots, N(x_{n-1}))) = N(a)$.

($\Leftarrow$) Então por $N(a)$ ser elemento anilador de A_N e N ser involutiva temos que, $A(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_i, \ldots, x_{n-1}) = N(N(A(N(N(x_1)), \ldots, N(N(x_{i-1})), N(N(a)), N(N(x_i)), \ldots, N(N(x_{n-1})))) = N(A_N(N(x_1), \ldots, N(x_{i-1}), N(a), N(x_i), \ldots, N(x_{n-1}))) = N(N(a)) = a$. □

Proposição 20. *Seja A uma função de agregação de aridade n, φ um automorfismo e $a \in [0, 1]$. a é um elemento anilador de A sss $\varphi^{-1}(a)$ é um elemento anilador de A^φ.*

Demonstração: Seja $x_1, \ldots, x_{n-1} \in [0, 1]$.

($\Rightarrow$) Então por a ser elemento anilador de A temos que, $A^\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \varphi^{-1}(a), x_i, \ldots, x_{n-1}) = \varphi^{-1}(A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1}), \varphi(\varphi^{-1}(a)), \varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_{n-1}))) = \varphi^{-1}(A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1}), a, \varphi(x_i), \ldots, \varphi(x_{n-1})))=\varphi^{-1}(a)$.

($\Leftarrow$) Então por $\varphi^{-1}(a)$ ser elemento anilador de A^φ temos que, $A(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_i, \ldots, x_{n-1})=\varphi(\varphi^{-1}(A(\varphi(\varphi^{-1}(x_1)), \ldots, \varphi(\varphi^{-1}(x_{i-1})), \varphi(\varphi^{-1}(a)), \varphi(\varphi^{-1}(x_i)), \ldots, \varphi(\varphi^{-1}(x_{n-1})))) = \varphi(A^\varphi(\varphi^{-1}(x_1), \ldots, \varphi^{-1}(x_{i-1}), \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(x_i), \ldots, \varphi^{-1}(x_{n-1}))) = \varphi(\varphi^{-1}(a)) = a$. □

3.3.6 Estritamente crescente

A é **estritamente crescente** se sempre que $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, ou seja $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ mas $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, temos que $A(\mathbf{x}) < A(\mathbf{y})$.

Exemplo 6. Exemplos de funções de agregação estritamente crescente são a média aritmética e a potência média que, dado um número real $r \neq 0$, é definida por

$$A_r(\mathbf{x}) = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}.$$

Já o produto, a média geométrica e as projeções não são estritamente crescentes, pois $(0)^n < (1, 0, \ldots, 0)$ mas $G((0)^n) = 0 = G(1, 0, \ldots, 0)$ e analogamente $\prod(0)^n = 0 = \prod(1, 0, \ldots, 0)$ assim como $\pi_i((0)^n) = 0 = \pi_i(1, 0, \ldots, 0)$ para todo $i = 2, \ldots, n$.

Proposição 21. *Seja A um função de agregação de aridade n. Se A é estritamente crescente então A não tem elemento anilador*

Demonstração: Suponha que A tem um elemento anilador a. Então, $A(0, a, \dots, a)$ $= a = A(1, a, \dots, a)$ que é uma contradição. □

Proposição 22. *Seja A um função de agregação de aridade n, φ um automorfismo e N uma negação forte. Se A é estritamente crescente então A^φ e A_N também são estritamente crescentes.*

Demonstração: Direto do fato de que automorfismos são estritamente crescentes e negações fortes são estritamente decrescentes. □

3.3.7 Elementos divisores de zero e divisores de hum

Um elemento $a \in (0, 1]$ é um **divisor de zero** de A se para todo $i = 1, \dots, n$ existe um $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (0, 1]^n$ tal que $x_i = a$ e $A(\mathbf{x}) = 0$.

Exemplo 7. Um exemplo é a função $A_\perp$ e

$$A_L(\mathbf{x}) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right).$$

Em particular neste último caso qualquer $a \in (0, 1)$ é um divisor de zero de A_L.

Alguns resultados imediatos que podemos extrair da definição de divisor de zero são so seguintes:

1. Se a é um divisor de zero de A, então $A(\mathbf{x}) = 0$ qunado $\max \mathbf{x} \leq a$.
2. Se a é um divisor de zero de A então todo $b \in (0, a]$ é também um divisor de zero de A.
3. Se A tem um divisor de zero então existe $a \in (0, 1]$ tal que $A((a)^n) = 0$.
4. Se A tem um divisor de zero então não é idempotente.
5. Se a não é um divisor de zero de A, então $A(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \geq (a)^n$.

Proposição 23. *Seja A um função de agregação de aridade n. Se A tem um divisor de zero então existe um $x \in (0,1]$ tal que $A((x)^n) = 0$.*

Demonstração: Seja a um divisor de zero de A. Então existe um $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) \in (0,1]^n$ tal que $x_i = a$ e $A(\mathbf{x}) = 0$. Seja $x = \min \mathbf{x}$. Então $x > 0$ e $(x)^n \leq \mathbf{x}$ e portanto $A((x)^n) \leq A(\mathbf{x}) = 0$. $\square$

Proposição 24. *Seja A um função de agregação de aridade n, φ um automorfismo e N uma negação forte. A tem um divisor de zero (ou de hum) sss A^φ e A_N também têm um divisor de zero (ou hum).*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Pela Proposição 23, existe $x \in (0,1]$ tal que $A((x)^n) = 0$ e portanto x é um divisor de zero de A. Mostraremos que $\varphi^{-1}(x)$ é um divisor de zero de A^φ. De fato, $A^\varphi((\varphi^{-1}(x))^n) = \varphi^{-1}(A((\varphi(\varphi^{-1}(x)))^n)) = \varphi^{-1}(A((x)^n)) = \varphi^{-1}(0) = 0$.

Analogamente, é possível mostrar que $N(x)$ é um divisor de zero de A_N.

($\Leftarrow$) Segue de imediato da prova anterior, uma vez que $(A^\varphi)^{\varphi^{-1}} = A$. $\square$

O conceito dual é o de **divisor de hum**. Um elemento $a \in [0,1)$ é um divisor de hum de A se para todo $i = 1,\ldots,n$ existe um $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in [0,1)^n$ tal que $x_i = a$ e $A(\mathbf{x}) = 1$.

Exemplo 8. Um exemplo é a função $A_\top$ e

$$A^L(x_1,\ldots,x_n) = \min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right).$$

Em particular neste último caso qualquer $a \in (0,1)$ é um divisor de hum de A^L.

3.3.8 Lineares

A é **invariante ao deslocamento** ou **estável por translação** se para todo $\lambda \in [-1,1]$

$$A(\lambda + x_1,\ldots,\lambda + x_n) = A(x_1,\ldots,x_n) + \lambda$$

sempre que $x_i \in [0,1]$, $x_i + \lambda \in [0,1]$ e $A(x_1,\ldots,x_n) + \lambda \in [0,1]$ com $i = 1,\ldots,n$.

Exemplo 9. O mínimo, o máximo, as projeções, e a média aritmética, são exemplos de funções de agregação invariantes por deslocamento. Já o produto, a média geométrica, a potência média, A_L e A^L não são invariantes por deslocamento.

A é **homogênea** se para todo $\lambda \in [0,1]$

$$A(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n)$$

sempre que $x_i \in [0,1]$ com $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo 10. O mínimo, o máximo, as projeções, a média aritmética, a média geométrica e a potência média são exemplos de funções de agregação homogêneas. Já o produto, A_L e A^L não são homogêneas.

Uma função de agregação que é invariante por deslocamento e homogênea é chamada de **linear**. Dos exemplos acima podemos concluir que o mínimo, o máximo, as projeções, e a media aritmética são funções de agregação linear.

Observe que pelas propriedades de contorno de funções de agregação, isto é $A((0)^n) = 0$ e $A((1)^n) = 1$, temos que se uma função de agregação é invariante por deslocamento ou homogênea então necessariamente ela é idempotente. Portanto, toda função de agregação linear é idempotente.

Observe ainda, que a classe da funções de agregação lineares não é fechada sobre conjungadas e dualidade, ou seja, o fato de A ser linear não significa necessariamente que A^φ ou A_N sejam lineares, para um automorfismo φ e negação forte N.

3.3.9 Aditivas Comonótonas

Dizemos que dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in [0,1]^n$ são comonótonos se existe uma permutação $P : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ tal que $x_{P(1)} \leq .... \leq x_{P(n)}$ e $y_{P(1)} \leq .... \leq y_{P(n)}$.

A é **aditiva comonótona** se para cada par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$ comonótonos tais que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in [0,1]^n$, temos que $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$.

Exemplo 11. O mínimo, o máximo, as projeções, a média aritmética, e a média aritmética ponderada são exemplos de funções de agregação aditivas comonótonas. Já o produto, média geométrica e potência média não são aditivas comonótonas.

4 Classes de Funções de Agregação

Existem diversas classes de funções de agregação, mas a mais geral é a que considera o mínimo e o máximo como referente para obtermos quatro classes de funções de agregação e, salvo o próprio mínimo e máximo, toda função de agregação pertence a uma e só uma dessas classes.

4.1 Médias

Um função e agregação A é considerada uma **média** (do Inglês *average*) se sempre retornar valores entre o mínimo e máximo das entradas, ou seja se $\min \leq A \leq \max$. O principio em médias é que o valor agregado das entradas não pode ultrapassar o maior valor delas nem estar abaixo do menor valor delas, o qual é importante, por exemplo, quando queremos agregar a opinião de diversos especialistas sobre quanto uma determinada alternativa satisfaz um determinado critério.

Proposição 25. *Uma função de agregação A de aridade n é uma média sss A é idempotente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $x \in [0,1]$, então $x = \min(x)^n \leq A((x)^n) \leq \max(x)^n = x$. Portanto, $A((x)^n) = x$.

($\Leftarrow$) Seja $\mathbf{x} \in [0,1]$. Como $(\min \mathbf{x})^n \leq \mathbf{x} \leq (\max \mathbf{X})^n$, então por A ser crescente e idempotente, $\min \mathbf{x} = A((\min \mathbf{x})^n) \leq A(\mathbf{x}) \leq A((\max \mathbf{x})^n) = \max \mathbf{x}$. $\square$

Na seção anterior vimos diversas funções de agregação do tipo média, tais como a média aritmética, geométrica, potência média, projeções e as funções de agregação internas, e portanto o mínimo e o máximo.

4.1.1 Médias baseadas em vetores de pesos

Em algumas situações é necessário considerar que as entradas têm pesos diferentes. Este é o caso, por exemplo, quando em tomada de decisão a avaliação de um especialista senior sobre o quanto uma dadad alternativa atende um critério tem um peso maior que de um outro especialista com menos gabarito.

Um vetor $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ é chamado de **vetor de pesos** se $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$.

A seguir daremos alguns exemplos de médias baseadas num vetor de pesos $\mathbf{w}$ arbitrário. Considere $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$

1. **Média aritmética ponderada**: $M_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i$.

2. **Média ponderada ordenada** (conhecida pela sigla **OWA** em Inglês): $owa_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = M_{\mathbf{w}\nearrow}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$ com $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = \mathbf{x}_{\nearrow}$.

3. **Média ponderada ordenada reversa** (ROWA em Inglês): $Rowa_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = M_{\mathbf{w}\searrow}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$ com $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = \mathbf{x}_{\searrow}$.

4. **Média ponderada ordenada generalizada**: $Gowa_{\mathbf{w},\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \varphi(x_{(i)})\right)$ com $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = \mathbf{x}_{\nearrow}$ e $\varphi \in Aut([0,1])$.

5. **Média geométrica ponderada**: $G_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{w_i}$.

6. **Média harmônica ponderada**: $H_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}\right)^{-1}$ com a conveção de que $\frac{w_i}{0} = 0$.

7. **Médias trigonométricas ponderadas**:

   (a) Seno: $SM_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \sin(\frac{\pi}{2} x_i)\right)$.

   (b) Coseno: $CM_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cos(\frac{\pi}{2} x_i)\right)$.

   (c) Tangente: $TM_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \tan(\frac{\pi}{2} x_i)\right)$.

8. **Média potência ponderada**: Dado um número real r não nulo, defina

$$M_{\mathbf{w},[r]}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

   e $M_{\mathbf{w},[0]} = G_{\mathbf{w}}$.

Cada uma das médias apresentadas acima admite uma versão tipo OWA. Por exemplo, a média geométrica ordenada seria definida como:

$$GO_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_{(i)}^{w_i}$$

e dado um número real r não nulo, a média potência ponderada ordenada seria definida como:

$$MO_{\mathbf{w},[r]}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Propriedades	Médias									
	$M_{\mathbf{w}}$	$owa_{\mathbf{w}}$	$Rowa_{\mathbf{w}}$	$Gowa_{\mathbf{w}}$	$G_{\mathbf{w}}$	$H_{\mathbf{w}}$	$SM_{\mathbf{w}}$	$CM_{\mathbf{w}}$	$TM_{\mathbf{w}}$	$M_{\mathbf{w},[r]}$
Idempotência	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Interna		$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$						
Comutatividade	$\surd\!\!\!\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$
Neutro		$\surd\!\!\!\times$	$\surd\!\!\!\times$							$\surd\!\!\!\times$
Anilador				$\surd$	$\surd$					se $r < 0$
Estrita	$\surd$	$\surd$	$\surd$			$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Lineares	$\surd$	$\surd$	$\surd$							
Homogênea	$\surd$	$\surd$	$\surd$			$\surd$				$\surd$
Aditiva Comonótona	$\surd$	$\surd$	$\surd$							

Tabela 1: Algumas funções de agregação do tipo média e suas propriedades

e $MO_{\mathbf{w},[0]} = GO_{\mathbf{w}}$. Em ambos casos, como no caso do OWA, temos que $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = \mathbf{x}_{\nearrow}$.

A Tabela 1 apresenta um resumo das propriedades satisfeitas por cada uma destas médias.

onde $\surd\!\!\!\times$ significa que depende do $\mathbf{w}$. Em particular, $owa_{\mathbf{w}}$, $Rowa_{\mathbf{w}}$ e $Gowa_{\mathbf{w}}$ são internas se e somente se $w_i = 1$ para algum i. Já as médias marcadas com $\surd\!\!\!\times$ são comutativas se e somente se $w_i = \frac{1}{n}$ para todo i.

O OWA não é uma agregação específica mas sim uma família de agregações. Para cada vetor de pesos temos uma agregação diferente. Assim, podemos conferir que o mínimo, o máximo, a média aritmética, a mediana, e as projeções são membros desta família.

Observe que todo OWA é um ROWA e vice-versa. De fato, dado um vetor de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ fixo, temos que $owa_{\mathbf{w}} = Rowa_{\mathbf{w}^R}$ e $Rowa_{\mathbf{w}} = owa_{\mathbf{w}^R}$ onde $\mathbf{w}^R = (w_n, \ldots, w_1)$.

Proposição 26. *[8, p.45] Seja* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ *um vetor de pesos e* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$. *Então*

$$H_{\mathbf{w}} \leq G_{\mathbf{w}} \leq M_{\mathbf{w}}.$$

E quando $n = 2$ *temos que*

$$G_{(0.5,0.5)}(x_1, x_2) = \sqrt{H_{(0.5,0.5)}(x_1, x_2) + M_{(0.5,0.5)}(x_1, x_2)}.$$

Observação 2. Seja $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in (0,1]^n$ um vetor de pesos e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$. Então

1. $\lim_{r\to-\infty} M_{\mathbf{w},[r]} = \min$.
2. $\lim_{r\to\infty} M_{\mathbf{w},[r]} = \max$.
3. $\lim_{r\to 0} M_{\mathbf{w},[r]} = G_{\mathbf{w}}$.
4. $M_{\mathbf{w},[1]} = M_{\mathbf{w}}$.
5. $M_{\mathbf{w},[-1]} = H_{\mathbf{w}}$.
6. Se $r \leq s$ então $M_{\mathbf{w},[r]} \leq M_{\mathbf{w},[r]}$.

4.1.2 Medidas de Orness e andness

A medida de *orness* de funções de agregação de médias é usada para medir o quão longe essa média está da menor disjunção, ou seja do máximo. Esta medida foi proposta em 1974 por Jozo Dujmovic em [18] e "redescoberta" diversas vezes com outros nomes como por exemplo foi chamada de grau de disjunção em [26, p. 115] e em [65] Ronald Yager definiu o conceito de orness para funções de agregação da família dos OWA de forma independiente. Posteriormente foi demonstrado em [43] que ambas noções de *orness* coincidem quando restritas aos OWA (ver também [8, p. 70]. Recentemente, diversas variantes e generalizações da noção de orness tem sido fornecidas, como em [33, 34, 41].

Definição 3. *Seja A uma função de agregação de aridade n. A medida de* ***orness*** *de A é*

$$orness(A) = \frac{\int_{[0,1]^n} A(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{[0,1]^n} \min(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int_{[0,1]^n} \max(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{[0,1]^n} \min(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

Teorema 27. *Seja A uma função de agregação de aridade n. Então,*

$$orness(A) = \frac{(n+1)\int_{[0,1]^n} A(\mathbf{x})d\mathbf{x} + 1}{n-1}. \tag{3}$$

Demonstração: Sai direto do fato que, como provado em [17], $\int_{[0,1]^n} \max(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{n}{n+1}$ e $\int_{[0,1]^n} \min(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{n+1}$. □

Proposição 28. *[43] e [8, p. 70] Seja* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ *um vetor de pesos. Então*

$$orness(owa_{\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{n-i}{n-1} = owa_{\mathbf{w}}\left(1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right).$$

Desta forma, o *orness* de um OWA pode ser calculado apartir do seu vetor de pesos e disto temos como consequência diversas propriedades:

1. $orness(owa_{\mathbf{w}}) = 1 - orness(Rowa_{\mathbf{w}})$.
2. $owa_{\mathbf{w}}$ é auto dual sss $orness(owa_{\mathbf{w}}) = 0.5$.
3. $orness(owa_{\mathbf{w}}) = 1$ sss $owa_{\mathbf{w}} = \max$.
4. $orness(owa_{\mathbf{w}}) = 0$ sss $owa_{\mathbf{w}} = \min$.
5. Se $w_i \leq w_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ então $owa_{\mathbf{w}} \geq 0.5$.
6. Se $w_i \geq w_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ então $owa_{\mathbf{w}} \leq 0.5$.

A seguinte proposição mostra que a soma convexa de dois OWAs é um OWA cuja medida de *orness* é a soma convexa dos orness de ambos OWA que o geraram.

Proposição 29. *[1, 8] Seja* $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in [0,1]^n$ *dois vetores de peso e* $\alpha \in [0,1]$. *Então* $A : [0,1]^n \to [0,1]$ *definido por*

$$A(\mathbf{x}) = \alpha owa_{\mathbf{w_1}} + (1-\alpha) owa_{\mathbf{w_2}}$$

é um OWA tal que

$$orness(A) = \alpha orness(owa_{\mathbf{w_1}}) + (1-\alpha) orness(owa_{\mathbf{w_2}})$$

Em [23] foi proposta uma outra medida relacionada ao *orness* denominada de diferência média de *orness* e definida como segue,

$$\overline{orness}(A) = \int_{[0,1]^n} \frac{A(\mathbf{x}) - \min(\mathbf{x})}{\max(\mathbf{x}) - \min(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

Dualmente, à medida de *orness* temos a medida de *andness* que indica o quão longe uma média está da maior conjunção, ou seja do mínimo.

4.2 Integrais de Choquet

As integrais de Choquet é uma basta e muito usada família de funções de agregação que generaliza a integral de Lebsegue. Esta integral receve este nome por ter sido introduzida em 1953 pelo matemático francês Gustave Choquet. Recentemente algumas generalizações destas integrais foram propostas em [42, 46].

A principal característica das integrais de Choquet é que elas permitem agregar as entradas de forma que não só considere a importância de entradas individuais, como é o caso das médias ponderadas, nem a magnitude delas, como é o caso das médias ponderadas ordenadas, mas que também leve em consideração os grupos (ou coalições).

Assim como as integrais de Lebesgue, as integrais de Choquet são baseadas em medidas. Informalmente, uma medida é uma função que atribui um valor numérico a conjuntos de objetos de algum universo de discurso satisfazendo algumas propriedades, entre elas a aditividade:

$$m\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \sum_{i\in I} m(X_i)$$

onde I é um conjunto de índices [53]. Exemplos de medidas são as que para todo intervalo fechado de números reais da seu comprimento, ou seja $m([r,s]) = s - r$ e a que dado qualquer conjunto finito de elementos do conjunto universo da a sua cardinalidade. A teoria de medidas fuzzy considera uma generalização da noção de medida onde a propriedade aditiva é substituida por uma propriedade de monotonicidade fraca.

Definição 4. *Uma* ***medida fuzzy*** *é uma função* $m : \wp(\mathbb{N}_n) \to [0,1]$ *tal que para todo* $X, Y \subseteq \mathbb{N}_n$ *temos que*

1. *Se* $X \subseteq Y$ *então* $m(X) \leq m(Y)$*;*
2. $m(\emptyset) = 0$ *e* $m(\mathbb{N}_n) = 1$.

Exemplo 12. As medidas fuzzy mais conhecidas são:

1. Medida Uniforme: $m_U(X) = \frac{|X|}{n}$
2. Medida de Dirac com respeito a $i \in \mathbb{N}_n$:

$$m_D^i(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in X \\ 0 & \text{se } i \notin X \end{cases}$$

3. Medida aditiva com respeito a um vetor de pesos $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$:

$$m^{\omega}(X) = \sum_{i \in X} w_i.$$

4. Medida simétrica com respeito a um vetor de pesos $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$:

$$m_s^{\omega}(X) = \sum_{i=1}^{|X|} w_i.$$

5. Medida potência com respeito a $p > 0$:

$$m_P^{p}(X) = \left(\frac{|X|}{n}\right).$$

6. Medida relativa (introduzida aqui (?)):

$$m_R(X) = \frac{\sum\limits_{i \in X} i}{\sum\limits_{i=1}^{n} i}.$$

Definição 5. *Seja $m : \wp(\mathbb{N}_n) \to [0,1]$ uma medida fuzzy. A **integral discreta de Choquet** com respeito a m é a função $C_m : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por*

$$C_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - x_{(i-1)}) m(\Gamma_i) \tag{4}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ e $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ é uma permutação crescente de $\mathbf{x}$, ou seja uma permutação tal que $0 = x_{(0)} \leq x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ e $\Gamma_i = \{(i), \ldots, (n)\}$.

Observe que quando $x_i = x_j$ para algum $i \neq j$, teremos mais de uma permutação crescente de $\mathbf{x}$. Mas isso pode fazer alguma diferência no valor de $C_m(\mathbf{x})$? não. O próximo exemplo ilustra porquê a permutação crescente usada é irrelevante neste caso.

Exemplo 13. Seja $\mathbf{x} = (0.3, 0.6, 0.3, 0.2, 0.4)$. Então temos duas possíveis permutações crescentes:

1. $x_{(1)} = x_4$, $x_{(2)} = x_1$, $x_{(3)} = x_3$, $x_{(4)} = x_5$ e $x_{(5)} = x_2$. Portanto, $\Gamma_1 = \mathbb{N}_5$, $\Gamma_2 = \{1, 3, 5, 2\}$, $\Gamma_3 = \{3, 5, 2\}$, $\Gamma_4 = \{5, 2\}$ e $\Gamma_5 = \{2\}$. Logo,

$$\begin{aligned} C_{m_R}(\mathbf{x}) &= 0.2 + (0.3 - 0.2)m_R(\Gamma_2) + (0.3 - 0.3)m_R(\Gamma_3) + \\ &\quad (0.4 - 0.3)m_R(\Gamma_4) + (0.6 - 0.4)m_R(\Gamma_5) \\ &= 0.2 + 0.1\tfrac{11}{15} + 0\tfrac{10}{15} + 0.1\tfrac{7}{15} + 0.2\tfrac{2}{15} \\ &= 0.34\overline{6} \end{aligned}$$

2. $x_{(1)} = x_4$, $x_{(2)} = x_3$, $x_{(3)} = x_1$, $x_{(4)} = x_5$ e $x_{(5)} = x_2$. Portanto, $\Gamma_1 = \mathbb{N}_5$, $\Gamma_2 = \{3, 1, 5, 2\}$, $\Gamma_3 = \{1, 5, 2\}$, $\Gamma_4 = \{5, 2\}$ e $\Gamma_5 = \{2\}$. Logo,

$$\begin{aligned} C_{m_R}(\mathbf{x}) &= 0.2 + (0.3 - 0.2)m_R(\Gamma_2) + (0.3 - 0.3)m_R(\Gamma_3) + \\ &\quad (0.4 - 0.3)m_R(\Gamma_4) + (0.6 - 0.4)m_R(\Gamma_5) \\ &= 0.2 + 0.1\tfrac{11}{15} + 0\tfrac{8}{15} + 0.1\tfrac{7}{15} + 0.2\tfrac{2}{15} \\ &= 0.34\overline{6} \end{aligned}$$

Proposição 30. *[8, p.95] Dada uma medida fuzzy $m : \wp(\mathbb{N}_n) \to [0, 1]$ a integral discreta de Choquet com respeito a m é uma função de agregação linear e idempotente.*

Teorema 31. *[8, p.95] Uma função de agregação $A : [0, 1]^n \to [0, 1]$ é uma integral de Choquet, i.e. $A = C_m$ para alguma medida fuzzy m sss A é linear e aditiva comonótona.*

Assim, da Tabela 1 é possível deduzir que os OWA, e portanto a média ponderada, o mínimo, o máximo e o OWA reverso, são integrais de Choquet.

Proposição 32. *Sejam m_1 e m_2 duas medidas fuzzy e $\alpha \in [0, 1]$. Então $A : [0, 1]^n \to [0, 1]$ definido por*

$$A(\mathbf{x}) = \alpha C_{m_1}(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)C_{m_2}(\mathbf{x})$$

é uma integral de Choquet.

Demonstração: Seja $m : \wp(\mathbb{N}_n) \to [0, 1]$ definido por $m(X) = \alpha m_1(X) + (1 - \alpha)m_2(X)$. Claramente m é uma medida fuzzy. Mostraremos que $C_m = A$ e portanto A é um integral de Choquet.

$$
\begin{aligned}
C_m(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})m(\Gamma_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})(\alpha m_1(\Gamma_i) + (1-\alpha)m_2(\Gamma_i)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})\alpha m_1(\Gamma_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})(1-\alpha)m_2(\Gamma_i)\right) \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})m_1(\Gamma_i)\right) + (1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)})m_2(\Gamma_i)\right) \\
&= \alpha C_{m_1}(\mathbf{x}) + (1-\alpha)C_{m_2}(\mathbf{x}) \\
&= A(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

□

Observe que a conjungada de uma integral de Choquet é uma integral de Choquet se, e somente se, o automorfismo é a identidade e o dual de um integral de Choquet é uma integral de Choquet se, e somente se, a negação forte é a de Zadeh.

Proposição 33. *[66] Seja m uma medida fuzzy. Então*

$$orness(C_m) = \frac{1}{n-1}\sum_{X\subseteq\mathbb{N}_n}\frac{(n-|X|)!|X|!}{n!}.$$

5 Funções de Agregação Conjuntivas

Funções de agregação conjuntivas modelam a conjunção fuzzy, ou seja o “e” lógico na lógica fuzzy. Considere a situação onde vários critérios são agregados conjuntivamente como na regra

SE a_1 é A_1 E a_2 é A_2 E...E a_n é A_n ENTÃO b é B.

Por exemplo, se para obter uma carta de condução é necessário passar tanto os testes teóricos como práticos de condução, então não importa quão bem se tenha saído na parte teórica, pois ela não compensará um mal desempenho no teste de condução. Portanto, conjunção não deve permitir compensação, ou seja nas conjunções pontuações baixas para alguns critérios não podem ser compensadas por pontuações dos outros critérios. Assim, o menor valor de qualquer uma das entradas limita o valor de saída (a partir de cima). Isto induz à seguinte definição: Uma função de agregação A de aridade n é **conjuntiva** se $A \leq \min$.

Como consequência imediata, temos que toda função de agregação conjuntiva tem 0 como elemento anilador e se tiver elemento neutro este necessariamente é 1. De fato toda função de agregação com 1 como elemento neutro é conjuntiva, mas nem toda função de agregação conjuntiva tem elemento neutro, como por exemplo a função

$$A(\mathbf{x}) = \min(x_1^2, \ldots, x_n^2).$$

Aquelas funções de agregação que têm 1 como elementro neutro são chamadas de **semi-cópulas** [8, Def. 3.6]. A seguinte subseção apresenta uma das classes mais importantes de semi-cópulas.

5.1 T-normas

Normas triangulares (t-normas) foram introduzidas em 1942 por Menger [45] para generalizar o axioma de desigualdade triangular das distâncias (métricas) em espaços métricos [39] para o que hoje em dia é conhecido como espaços métricos probabilísticos. Porém a noção de t-norma dada por Menger era muito geral, ao não requerir a existência de um elemento neutro fixo e nem associatividade. Posteriormente, Schweizer e Sklar em [54, 55] dividiram as Normas triangulares entre t-normas e t-conormas (a operação dual a t-norma), e no caso das t-normas tratam elas como uma operação de semigrupo no intervalo unitário $[0, 1]$ com elemento neutro 1. Mas foram Alsina, Trillas e Valverde que em [3] usaram t-normas para modelar conjunção fuzzy, generalizando diversas interpretações para conjunção fuzzy propostas até esse então.

Definição 6. $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *é uma norma triangular (**t-norma**) se satisfaz os seguintes axiomas:*

(T1) $T(x, y) = T(y, x)$ *– Comutatividade;*

(T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ *– Associatividade;*

(T3) *Se* $x \leq x'$ *e* $y \leq y'$ *então* $T(x, y) \leq T(x', y')$ *– Monotonicidade; e*

(T4) $T(x, 1) = x$ *– 1-Identidade.*

O axioma 1-identidade também as vezes é chamado de condição de fronteira.

Observe que, para qualquer t-norma T, uma vez que $T(0, 1) = 0$, e que por monotonicidade $T(0, 0) \leq T(0, 1)$, então $T(0, 0) = 0$. Portanto, $T(x, y) = x \wedge y$ quando $x, y \in \{0, 1\}$, ou seja toda t-norma se comporta como a conjunção clássica quando so consideramos os valores Booleanos 0 e 1. Logo, pela monotonicidade, é fácil deduzir que $T(x, 0) = T(0, x) = 0$.

A seguir apresentamos um conjunto de t-normas, muito presente na literatura sobre t-normas.

- Gödel: $T_G(x, y) = \min(x, y)$
- Łukasiewicz: $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$
- Produto: $T_P(x, y) = xy$
- Fraca: $T_W(x, y) = 1$ se $\max(x, y) = 1$ e $T_W(x, y) = 0$ caso contrário
- Hamacher: Seja $\gamma \geq 0$, $T_{H,\gamma}(x, y) = \frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$

Porém, existe uma quantidade não contável de t-normas. De fato dada qualquer t-norma T e $\alpha \in [0, 1]$ temos que

$$T_\alpha(x, y) = \begin{cases} T(x, y) & \text{se } \max(x, y) < \alpha \\ T_G(x, y) & \text{senão} \end{cases} \tag{5}$$

É possível estabelecer uma ordem entre t-normas. Sejam T e T' duas t-normas quaisquer, então
$T \leq T'$ se $\forall x, y \in [0, 1]$, $T(x, y) \leq T'(x, y)$

Proposição 34. *Seja T uma t-norma. $T_W \leq T \leq T_G$.*

Demonstração: Se $\max x, y = 1$ então trivialmente, por 1-identidade, $T_W(x, y) = T(x, y) = T_G(x, y)$. Se $\max(x, y) \neq 1$ então $T_W(x, y) = 0$ e portanto, trivialmente, $T_W(x, y) \leq T(x, y)$. Logo, $T_W \leq T$. Por outro lado, uma vez que por monotonicidade $T(x, y) \leq T(x, 1)$ e $T(x, y) \leq T(1, y)$ então por 1-identidade e comutatividade $T(x, y) \leq x$ e $T(x, y) \leq y$. Logo, $T(x, y) \leq \min(x, y) = T_G(x, y)$.

Um $x \in [0, 1]$ é dito um elemento idempotente de uma t-norma T se $T(x, x) = x$. Observe que a única t-norma onde todo $x \in [0, 1]$ é idempotente, é T_G. De fato suponha que T tem todos seus elementos idempotente e $x, y \in [0, 1]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \leq y$. Assim, por 1-identidade, $T(x, x) = x = T(x, 1)$, mas por monotonicidade $T(x, x) \leq T(x, y) \leq T(x, 1)$. Por tanto, $T(x, y) = x$, ou seja $T(x, y) = T_G(x, y)$.

Note que, 0 e 1 são elementos idempotentes de qualquer t-norma, e por isto chamamos eles de elementos idempotentes triviais.

Um $x \in (0,1)$ é dito um elemento nilpotente de uma t-norma T, se existe um número natural n tal que $T^n(x) = 0$, onde $T^0(x) = 1$ e $T^{k+1}(x) = T(x, T^k(x))$. Por exemplo, todo $x \in (0,1)$ é um elemento nilpotente de T_L. De fato, $T^{10}(0.9) = 0$.

Um $x \in (0,1)$ é dito um elemento divisor de zero de T se existe um $y \in (0,1)$ tal que $T(x,y) = 0$. Por exemplo, todo $x \in (0,1)$ é um divisor de zero de T_L. De fato, $T_L(x, 1-x) = 0$.

Proposição 35. *Seja T uma t-norma. Então T tem um elemento divisor de zero sse T tem um elemento idempotente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $T(x,y) = 0$ para algum $x, y \in (0,1)$. Então fazendo $z = \min(x,y)$, temos que por monotonicidade, $T(z,z) \leq T(x,y)$ e portanto $T^2(z) = T(z,z) = 0$, o que mostra que z é um elemento idempotente de T.

($\Leftarrow$) Se $x \in (0,1)$ é um elemento idempotente de T, então $T^n(x) = 0$. Claramente $n \geq 2$. Logo, fazendo $y = T^{n-1}(x)$, temos que $T(x,y) = T^n(x) = 0$. Portanto, x é um elemento divisor de zero de T.

Definição 7. *Seja T uma t-norma. T é chamada de estritamente monótona se para todo $x, y, z \in [0,1]$ tal que $x \neq 0$ e $y < z$ temos que $T(x,y) < T(x,z)$. T satisfaz a lei da cancelação se $T(x,y) = T(x,z)$ implica que $x = 0$ ou $y = z$. T satisfaz a lei da cancelação condicional se $T(x,y) = T(x,z) > 0$ implica que $y = z$. T é chamada de Arquimediana se para cada $x, y \in (0,1)$ existe um número natural n tal que $T^n(x) < y$. T é chamada de positiva se $T(x,y) = 0$ então $\min(x,y) = 0$, ou noutras palavras se não tiver elementos divisores de zero.*

Note que T_G não é nem estritamente monótona, nem satisfaz a lei da cancelação, e nem é Arquimediana. Já T_L e T_W são Arquimedianas e satisfazem a lei da cancelação condicional, mas nem são estritamente monótonas nem satisfaz a lei da cancelação. Por outro lado T_P satisfaz a lei da cancelação, é Arquimediana e estritamente monótona. Observe ainda que trivialmente a lei da cancelação é mais forte que a lei da cancelação condicional e portanto toda t-norma que satisfaz a primeira satisfaz a segunda lei.

Proposição 36. *Seja T uma t-norma. Então*

1. *T é estritamente monótona sse satisfaz a lei da cancelação;*

2. *Se T é estritamente monótona então os únicos elementos idempotentes de T são os trivias*

3. *Se T é estritamente monótona então T é positiva.*

Demonstração: 1. ($\Rightarrow$) Se $T(x,y) = T(x,z)$, por definição de estritamente monótona, não pode ser o caso de $x > 0$ e $y \neq z$, que é o mesmo que dizer $x = 0$ ou $y = z$. ($\Leftarrow$) Se $x > 0$ e $y < z$, então por monotonicidade $T(x,y) \leq T(x,z)$. Se $T(x,y) = T(x,z)$, então, pela pela lei da cancelação, $x = 0$ ou $y = z$. o qual seria uma contradição com a premisa de que $x > 0$ e $y < z$. Logo, $T(x,y) < T(x,z)$.

2. Se $T(x,x) = x$ então, uma vez que $T(x,1) = x$, temos que $T(x,x) = T(x,1)$. Como provado acima, T satisfaz a lei do cancelamento. Logo, ou $x = 0$ ou $x = 1$, e portanto em ambos casos x seria um elemento idempotente trivial.

3. Se $T(x,y) = 0$ então como $T(x,0) = 0$, temos que $T(x,0) = T(x,y)$. Logo, pela lei do cancelamento, ou $x = 0$ ou $y = 0$. Portanto, T não teria divisores de zero.

Um t-norma T é contínua se ela é continua no sentido usual de continuidade na análises real. Há muitas formas de caracterizar o que seria uma função contínua. Entre as mais usuais em matemática, temos via topologia, via métricas e via limite (para maiores detalhes veja [39]). Aqui, por simplicidade usaremos a definição de continuidade baseada em limite. Um t-norma é contínua se para cada sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valores em $[0,1]$, temos que

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n)$$

Dizemos que uma t-norm é contínua pela esquerda [25] se para cada sequência crescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valores em $[0,1]$ e $y \in [0,1]$, temos que

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n, y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y)$$

Trivialmente, toda t-norma contínua é contínua pela esquerda, mas a conversa não é verdadeira. Um exemplo de t-norma que é contínua pela esquerda mas não é contínua, foi dado por János Fodor em [24], e é a t-norma nilpotente mínima, definida por

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x + y \leq 1 \\ \min(x,y) & \text{senão} \end{cases}$$

Diversos métodos para gerar t-normas contínuas pela esquerda podem ser encontrado em [32]. Kolesárová em [35] demonstrou que no caso de t-normas Arquimedianas continuidade pela esquerda implica em continuidade, ou seja uma t-norma Arquimediana T é contínua sse é contínua pela esquerda.

Um t-norma T é chamada de estrita se for contínua e estritamente monótona, e é chamada de nilpotente se for contínua e todo $x \in (0, 1)$ for um elemento nilpotente de T. Por exemplo, T_P é estrita enquanto que T_L é nilpotente.

Teorema 37. *Seja T uma t-norma Arquimediana e contínua. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é nilpotente.*

2. *T tem algum elemento idepotente.*

3. *T tem algum divisor de zero*

4. *T não é estrita.*

Demonstração: Trivialmente 1. implica em 2., 2. em 3. (de fato pela Proposição 35 2. 3. são equivalentes) e 3. em 4. Assim só faltaria provar que 4. implica em 1.

Como T não é estrita mas é contínua, então existem $x, y, z \in (0, 1)$ tais que $y < z$ e $T(x, y) = T(x, z)$. Como $T(y, z) \leq y < z = T(1, z)$ então pelo teorema do valor meio[2], existe um $w \in [y, 1)$ tal que $T(y, w) = y$. Logo, $T(x, y) = T(x, z) = T(x, T(y, w)) = T(T(x, y), w)$ e por indução temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T(x, y) = T(T(x, y), T^n(w))$. Assim pela continuidade de T, temos que,

$$T(x, y) = \lim_{n\to\infty} T(T(x, y), T^n(w)) = T(T(x, y), \lim_{n\to\infty} T^n(w)) = T(T(x, y), 0) = 0$$

Uma vez que T é Arquimediana, existe um n tal que $T^n(x) < y$ e portanto $T^{n+1}(x) \leq T(x, y) = 0$. Logo, x é um elemento nilpotente de T.

Agora seja um $v \in (0, 1)$ qualquer, como T é Arquimediana, então existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(v) \leq x$ e portanto, $T^{m+n}(v) \leq T^n(x) = 0$. Ou seja, todo elemento $v \in (0, 1)$ é nilpotente.

5.2 Funções de Agregação Disjuntivas

As funções de agregação disjuntivas, modelam a disjunção fuzzy ou o "ou" da lógica fuzzy. Em uma disjunção a satisfação de qualquer um dos critérios é suficiente para satisfazer a disjunção toda. Por exemplo, tanto uma febre alta

[2] O teorema do valor meio é uma propriedade de funções reais contínuas.

quanto uma toze forte são sintomas de que alguem está doente, mas só um desses sintomas é suficiente para concluirmos isso. Podemos formalizar isso em uma declaração lógica ”Se o paciente apresenta febre alta OU toxe forte, ENTÃO podemos concluir que ele esta doente”. Mas se ambos acontecerem ao mesmo tempo, eles reforzam a conclusão, e portanto as evidencias de que o paciente está de fato doente são mais fortes do que a causada por qualquer um desses sintomas isoladamente. Isto leva à seguinte definição: Uma função de agregação A é **disjuntiva** se $\max \leq A$.

Existe numa dualidade entre disjunção e connjunção. Dada uma negação fuzzy forte N e uma função de agregação A temos que A é conjuntiva sss A_N é disjuntiva e vice-versa. Portanto, classes de funções de agregação disjuntivas podem ser obtido por dualidade de classes de funções de agregação conjuntivas. Por exemplo, uma função de agregação A é uma **semi-copula dual** se A_{N_Z} é uma semi-copula, onde N_Z é a negação de Zadeh. Então, semi-copulas duais são funções de agregação que têm 0 como elemento neutro (e portanto são disjuntivas).

Analogamente, as duais das t-normas são chamadas de t-conormas. Basicamente, uma t-conorma é uma função de agregação de aridade 2, que é comutativa, associativa e tem 0 como elemento neutro.

Como de alguma forma toda propriedade e estudo de t-conromas podem ser reduzidas ao estudo das propriedades duais para t-normas, nós não aprofundaremos este tipo de funções de agregação.

5.3 Funções de Agregação Mistas

Funções dea gregação mistas são funções de agregação que não se encaixam em nenhuma das três classes anteriores, ou seja não são nem de médias, nem conjuntiva e nem disjuntivas. Outra forma equivalente de definir elas é a seguinte. Uma função de agregação A de aridade n é mista se existe $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$ tal que ou $A(\mathbf{x}) < \min \mathbf{x}$ e $\min \mathbf{y} < A(\mathbf{y}$, ou, $A(\mathbf{x}) < \max \mathbf{x}$ e $\max \mathbf{y} < A(\mathbf{y}$. Portanto, funções de agregação mistas não são comparáveis com o mínimo ou não são comparáveis com o máximo.

A principal utilidade de funções de agregação mista é na tomada de decisão onde alguns atributos são positivos enquanto outros negativo. Isto está fortemente relacionado com a agregação bipolar, na qual alguns valores são considerados como evidências ”positivas”e outros como evidências ”negativas”. Por exemplo, alguns sintômas podem contribuir para o fechamento do diagnóstico de um paciênte enquanto outros podem contribuir para descartar esse diagnóstico.

Uma outra situação onde funções de agregação mistas podem ser necessária, é na modelagem de regras de dedução heterogêneas, ou seja regras do tipo

SE a_1 é A_1 E (a_2 é A_2 OU a_3 é A_3) ENTÃO b é B.

então precissariamos de uma função de agregação A de aridade 3, que misture um conjunção C com disjunção D, de tal forma queo $A(x, y, z) = C(x, D(y, z))$.

Dado $a \in (0, 1)$ um exemplo de função de agregação mista de aridade n é a seguinte:

$$M_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} C(\mathbf{x}) & \text{se } \max \mathbf{x} > a \\ D(\mathbf{x}) & \text{se } \min \mathbf{x} < a \\ M(\mathbf{x}) & \text{senão} \end{cases}$$

onde C é um função de agregação conjuntiva, D é um função de agregação disjuntiva e M uma função de agregação do tipo média.

5.4 Uninormas

Uma classe importante de funções misturas é a classe das uninormas que não são nem t-normas nem t-conormas. Uninormas foram introduzidas 1996 por R. Yager e A. Rybalov no artigo [68] como sendo uma generalização da noção de t-norma e t-conorma relaxando a propriedade de elemento neutro dessas duas classes de funções de agregação. Desde então este tipo de função de agregação tem sido aplicada em sistemas fuzzy baseado em regra [67], em tomada de decisão [61], e redes neurais fuzzy [10].

Formalmente, um função de agregação $U : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ é uma **uninorma** se é comutativa, associativa e tem um elemento neutro. Assim, claramente, a classe das t-normas é extamente a classe das uninormas cujo elemento neutro é 1 e a classe das t-conormas é extamente a classe das uninormas cujo elemento neutro é 0.

Proposição 38. *Seja U uma uninorma. U é uma função de agregação mista se e somente se o elemento neutro de U é diferente de 0 e de 1.*

Demonstração: Seja e o elemento neutro de U. Se $e = 0$ então U é uma função de agregação conjuntiva e portanto não é mista. Analogamente, $e = 1$ então U é uma função de agregação disjuntiva e portanto não é mista. Se $e \in (0, 1)$ então, para todo $x, y \in [0, e)$ temos que $U(x, y) \leq U(x, e) = x$ e $U(x, y) \leq U(e, y) = y$, e por conseguinte, $U(x, y) \leq \min(x, y)$. Por outro lado, para todo $x, y \in (e, 1]$ temos que $U(x, y) \geq U(x, e) = x$ e $U(x, y) \geq U(e, y) = y$, e por conseguinte,

$U(x, y) \geq \max(x, y)$. Portanto, U é mista se somente se o elemento neutro é diferente de 0 e de 1. $\square$

Lema 39. *Seja* $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *e* $e \in [0,1]$ *seu elemento neutro. Se* $\max(x, y) < e$ *e* $e > \min(x, y)$ *então* $\min(x, y) \leq U(x, y) \leq \max(x, y)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos assumir que $\max(x, y) = x$. Portanto, como $\max(x, y) < e$ e $e > \min(x, y)$, então temos que $x > e$ e $y < e$. Suponha que $U(x, y) < \min(x, y) = y$ então $y = U(e, y) \leq U(x, y) < y$ que é uma contradição e portanto $U(x, y) \geq \min(x, y)$. Por outro lado, suponha que $U(x, y) > \max(x, y) = x$ então, $x < U(x, y) \leq U(x, e) = x$ que também é uma contradição e portanto $U(x, y) \leq \max(x, y)$. $\square$

Teorema 40 (caracterização)**.** *Seja* $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *e* $e \in [0,1]$. U *é uma uninorma com elemento neutro* e *sss existem uma t-norma* T*, uma t-conorma* S *e uma média* M*, tal que,*

$$U(x, y) = \begin{cases} T(x, y) & \textit{se } \max(x, y) < e \\ S(x, y) & \textit{se } e < \min(x, y) \\ x + y - e & \textit{se } e \in \{x, y\} \\ M(x, y) & \textit{senão} \end{cases}$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $e > 0$ entao defina $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ por

$$T(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & \text{se } \max(x, y) < e \\ \min(x, y) & \text{senão} \end{cases}$$

Provaremos que T é uma t-norma. Trivialmente T é comutativa. 1 é lemento neutro de T pois $T(x, 1) = \min(x, 1) = x$. Para provar a associatividade de T deve considerar diversos casos:

1. Caso $\max(x, y, z) < e$: $T(x, T(y, z)) = U(x, U(y, z)) = U(U(x, y), z) = T(T(x, y), z)$.

2. Caso $e < \min(x, y, z)$: $T(x, T(y, z)) = \min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z) = T(T(x, y), z)$.

3. Caso, $x > e$ e $y < e$: $T(x, T(y, z)) = \min(x, T(y, z)) = T(y, z) = T(\min(x, y), z) = T(T(x, y), z)$.

4. Caso, $x > e$, $y > e$ e $z < e$: $T(x, T(y, z)) = \min(x, \min(y, z)) = z = \min(\min(x, y), z) = T(T(x, y), z)$.

5. Caso $x < e$ e $y > e$: Análogo ao caso 3.

6. Caso $x < e$, $y < e$ e $z > e$: $T(x, T(y, z)) = T(x, \min(y, z)) = T(x, y) = \min(T(x, y), z) = T(T(x, y), z)$.

7. Caso $x = 1$: $T(x, T(y, z)) = T(y, z) = T(T(1, y), z) = T(T(x, y), z)$.

8. Caso $y = 1$: Analogo ao caso anterior.

9. Caso $z = 1$: $T(x, T(y, z)) = T(x, y) = T(T(x, y), 1) = T(T(x, y), z)$.

Portanto, T é associativa.

Finalmente, se $y \leq z$ então

1. Caso $x < e$ e $z < e$: $T(x, y) = U(x, y) \leq U(x, z) = T(x, z)$.

2. Caso $x < e$, $y \geq e$ e $z \geq e$: $T(x, z) = \min(x, z) = x \geq \min(x, y) = T(x, y)$.

3. Caso $x < e$, $y < e$ e $z \geq e$: $T(x, y) = U(x, y) \leq U(x, e) = x$ e $T(x, y) = U(x, y) \leq U(e, y) = y$. Por tanto $T(x, y) \leq \min(x, y) \leq \min(x, z) = T(x, y)$.

4. Caso $x \geq e$: $T(x, y) = U(x, y) \leq U(x, z) = T(x, z)$.

Portanto, T é crescente e consequentemente, T é uma t-norma.

Analogamente podemos provar que $S : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ definido como

$$S(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & \text{se } e < \min(x, y) \\ \max(x, y) & \text{senão} \end{cases}$$

é uma t-conorma.

A seguir provaremos que $M : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ definido como

$$M(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{se } e < \min(x, y) \\ \min(x, y) & \text{se } \max(x, y) < e \\ U(x, y) & \text{senão} \end{cases}$$

é uma função de agregação do tipo média.

Claramente, M satisfaz as propriedades de contorno, ou seja $M(0, 0) = 0$ e $M(1, 1) = 1$. Se $y \leq z$ então

1. Caso $x < e$ e $y \geq e$
2. Caso $e < \min(x, y)$: Então $e < \min(x, z)$ e portanto $M(x, y) = \max(x, y) \leq \max(x, z) = M(x, z)$.
3. Caso $\max(x, y) < e$ e $\max(x, z) < e$: Então $M(x, y) = \min(x, y) \leq \min(x, z) = M(x, z)$.
4. Caso $\max(x, y) < e$ e $\max(x, z) \geq e$: Então pelo Lema 39, $M(x, y) = \min(x, y) \leq U(x, z) = M(x, z)$.
5. Caso $x < e$ e $y \geq e$: Então $z \geq e$ e portanto, $M(x, y) = U(x, y) \leq U(x, z) = M(x, z)$.

Logo, M é crescente. Pelo Lema 39 e pela definição de M, temos que $\min \leq M \leq \max$ e portanto M é uma função de agregação do tipo média. □

6 Aplicações

6.1 Em Tomada de Decisão Fuzzy

Existem diversos métodos em que lógica fuzzy pode auxiliar na tomada de decisão. Estes métodos podem ser classificados em dois: aqueles que são baseados em relações de preferências fuzzy (por exemplo ver [13, 29, 36, 49]) e aqueles baseados em matrizes de decisão fuzzy (por exemplo ver [9, 31, 64]).

Apresentaremos um exemplo de método de tomada de decisão multi-critério que considera um grupo de especialistas, baseado em matrizes de decisão fuzzy, onde algumas funções de agregação de média podem ser usadas.

6.1.1 Método de Tomada de Decisão Multi-atributo e Multi-Especialista Baseado em Matrizes de Decisão

Seja $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ um conjunto de especialistas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito e não vazio de alternativas, e $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ um conjunto de atributos ou critérios. O tomador de decisão determina um vetor de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_p)^T$ para os atributos. Um método de tomada de decisão multi-atributo e multi-especialista (MTDMAME) baseado em matrizes de decisão fuzzy (MDF) é um algoritmo que determina o ranking das alternativas em X baseado na opinião de cada especialista em E, os quais avaliam o quanto cada alternativa satisfaz cada atributo atribuindo um grau fuzzy, isto é, um valor no intervalo $[0, 1]$.

Propomos o seguinte método (algoritmo) para obter tal ranking:

Entrada: X, W, e para cada $l = 1, \ldots, m$ uma matriz de decisão R^l de dimensão $n \times p$ onde cada posição (i, j) em R^l, denotada por R^l_{ij}, contém um valor do intervalo $[0, 1]$, o qual reflete o quanto a alternativa x_i atende o atributo (ou critério[3]) a_j.

Saída: Um ranking $r : X \to \{1, \ldots, n\}$, significando que uma alternativa $x \in X$ é melhor que uma alternativa $y \in X$, denotado por $x > y$, sempre que $r(x) < r(y)$ e $r(x) = r(y)$ significa que o método foi incapaz de determinar se x é uma alternativa pior ou melhor que y[4], denotado por $x \sim y$.

Passo 1: Agregar as MDF dos especialistas em uma única MDF $\mathcal{RC}$, chamada de matriz de decisão de consenso, definida para cada $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$, como:

$$\mathcal{RC}_{ij} = owa_\Lambda(R^1_{ij}, \ldots, R^m_{ij}) \tag{6}$$

onde $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ é o vetor de pesos:

- Caso m for par: $\lambda_i = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+2-i}} + \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}m}$ para todo $i = 1, \ldots, \frac{m}{2}$, e $\lambda_i = \lambda_{m+1-i}$ para cada $i = \frac{m}{2} + 1, \ldots, m$.
- Caso m for ímpar: $\lambda_i = \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}+2-i}} + \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}m} + \frac{1}{4m}$ para todo $i = 1, \ldots, \frac{m+1}{2}$, e $\lambda_i = \lambda_{m+1-i}$ para cada $i = \frac{m+1}{2} + 1, \ldots, m$.

Passo 2: Para cada alternativa x_i, com $i = 1, \ldots, n$, usando $M_{\mathbf{w}}$, determine o índice coletivo total $\mathbb{L}^*$-valorado O_i como segue:

$$O_i = M_{\mathbf{w}}(\mathcal{RC}_{i1}, \ldots, \mathcal{RC}_{in}) \tag{7}$$

Passo 3: Determinar um ranking das alternativas a partir dos índices coletivos totais de tal manera que $x_i > x_j$ quando $O_i > O_j$ e $x_i \sim x_j$ quando$O_i = O_j$. Assim, a função de saída $r : X \to \{1, \ldots, n\}$ é definida por $r(x_i) = j$ sss O_i é o j-ésimo maior índice coletivo total.

[3]No caso de se tratar de um critério de custo (ou seja negativo) será considerado seu complemento.

[4]A maioria dos métodos de tomada de decisão admitem situações (configurações) em que eles são incapazes de discriminar qual entre duas alternativas diferentes é melhor.

Tabela 2: Avaliação do especialista p_1.

R^1	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	0.6	0.45	0.45	0.35
A_2	0.6	0.4	0.55	0.15
A_3	0.6	0.7	0.55	0.7

Tabela 3: Avaliação do especialista p_2.

R^2	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	0.7	0.45	0.65	0.55
A_2	0.75	0.55	0.65	0.55
A_3	0.55	0.65	0.6	0.4

Exemplo Ilustrativo do Primeiro Método

Considere o problema de adquirir um sistema de ar condicionado central usado como exemplo em [58]. Consideram-se três alternativas de sistemas de ar-condicionado central $\{A_1, A_2, A_3\}$; quatro atributos: a_1 (economia), a_2 (funcionalidade), a_3 (operacionalidade) e a_4 (longevidade); e três especialistas $\{p_1, p_2, p_3\}$. Cada especialista fornece um grau para representar o quanto, na opinião dele, cada uma das três alternativas satisfaz cada um dos quatro critérios. Essas avaliações dos especialistas são colocadas na forma de Tabelas, como por exemplo as tabelas 2, 3 e 4. Só que em [58] são usadas graus fuzzy intuicionistas intervalares[5] em vez de fuzzy e aqui nos consideramos o ponto medio do grau de pertinência intervalar. O vetor de pesos para os atributos é $\mathbf{w} = (0.2134, 0.1707, 0.2805, 0.3354)$ [6].

Como há três especialistas ($m = 3$), então o vetor de pesos é calculado como

[5]Uma extensão da teoria fuzzy proposta em [4]. Para mais detalhes das diversas extensões da lógica fuzzy ver [11].

[6]Em [58] foram considerados os pesos $V = (0.35, 0.28, 0.46, 0.55)$ que não satisfazem a condição que a soma dos pesos seja 1. $\mathbf{w}$ é o vetor de pesos obtidos através da normalização padrão de V.

Tabela 4: Avaliação do especialista p_3.

R^3	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	0.6	0.35	0.55	0.45
A_2	0.55	0.55	0.5	0.4
A_3	0.4	0.4	0.45	0.55

Tabela 5: Matriz de decisão de consenso

RC	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	$0.6291\overline{6}$	$0.4208\overline{3}$	0.55	0.45
A_2	$0.6291\overline{6}$	0.50625	$0.56458\overline{3}$	$0.3708\overline{3}$
A_3	$0.5208\overline{3}$	$0.591\overline{6}$	$0.53541\overline{6}$	0.55

segue:

$\lambda_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 0.291\overline{6}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 0.41\overline{6}$

$\lambda_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 0.291\overline{6}$

A Tabela 5 apresenta matriz de decisão de consenso obtida das Tabelas 2, 3 e 4 considerando a Equação (6). Por exemplo, RC_{11} é calculado da seguinta forma:

$$
\begin{aligned}
RC_{11} &= owa_{\Lambda}(R^1_{11}, R^2_{11}, R^3_{11}) \\
&= 0.291\overline{6} \cdot 0.6 + 0.41\overline{6} \cdot 0.6 + 0.291\overline{6} \cdot 0.7 \\
&= 0.6291\overline{6}
\end{aligned}
$$

O índice coletivo total é calculado usando a Equação (7) como segue:

- $O_1 = 0.521671\overline{6}$
- $O_2 = 0,51722041\overline{6}$
- $O_3 = 0,54226208\overline{3}$

Por exemplo, em detalhes,

$$
\begin{aligned}
O_1 &= M_{\mathbf{w}}(0.6291\overline{6}, 0.4208\overline{3}, 0.55, 0, 45) \\
&= 0.2134 \cdot 0.6291\overline{6} + 0.1707 \cdot 0.4208\overline{3} + 0.2805 \cdot 0.55 + 0.3354 \cdot 0.45 \\
&= 0.51130541\overline{6}
\end{aligned}
$$

Assim, considerando este índice coletivo total obtemos o seguinte ranking das alternativas:

$$A_3 > A_1 > A_2$$

o qual coincide com o ranking obtido por [58] e por 3 dos quatro ranking obtidos em [15] (todos eles considerando graus fuzzy intuicionistas intervalares).

6.1.2 Método de Tomada de Decisão Baseado em Relações de Preferência Fuzzy

Uma relação de preferência fuzzy sobre um conjunto finito e não vazio X, é uma relação binária fuzzy R sobre X, ou seja $R : X \times X \to [0, 1]$.

Consideremos uma indexação de X, isto é uma bijeção $I : \mathbb{N}_n \to X$, onde n é a cardinalidade de X. Por simplicidade notacional, para cada $i, j \in \mathbb{N}_n$, usaremos x_i e $R_{i,j}$ em vez de $I(i)$ e $R(x_i, x_j)$, respectivamente. O significado de $R_{i,j}$ é que a alternativa x_i é preferida à alternativa x_j (denotado por $x_i \succ x_j$) com um grau fuzzy $R_{i,j}$. Usualmente, é requerido que a relação de preferência fuzzy também satisfaça propriedade de N-reprocidade, ou seja, $R_{i,j} = N(R_{j,i})$, onde N é uma negação forte ou alguma outra condição $R_{i,i} = 0.5$ [14, 27].

A tomada de decisão em grupo ou multi-especialista baseada em relações de preferência fuzzy consiste em: um conjunto finito, não vazio e indexado $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de alternativas, um conjunto finito, não vazio e indexado $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ de tomadores de decisão ou especialistas junto com um vetor de pesos $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, ou seja $\lambda_i > 0$ para cada $i \in \mathbb{N}_m$ e $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, e as relações de preferência fuzzy sobre X de cada tomador de decisão. Denotaremos a relação de preferência fuzzy do tomador de decisão d_k por R^k.

Existem diversos métodos para obter, de modo razoável, um ranking das alternativas como por exemplo os propostos em [2, 16, 38, 40, 56, 62, 63]. No entanto, o método do voto é uma das estrategias mais simples e bem sucedidas para tomada de decisão (ver por exemplo [22, 19, 30, 37, 49]). Para o caso de valores fuzzy, a avaliação final de uma alternativa x_i considerando uma única relação de preferência fuzzy R, é calculada como segue:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}\right) - R_{i,i}.$$

É claro que para o ranking final da o mesmo se normalizamos esses valores dividindo-os por $n - 1$, isto é, se usarmos a média aritmética dos valores na posição da linha i de R que são diferentes de $R_{i,i}$. Analogamente como foi feito em [60], quando um grupo de tomadores de decisão com diferentes pesos é considerado, cada um com suas próprias relações de preferência fuzzy, agregamos essas relações de preferências fuzzy usando em cada posição a média ponderada. Assim, o método é o seguinte:

Entrada: X, Λ, e para cada $l = 1, \ldots, m$ uma relação de preferência fuzzy

R^l de dimensão $n \times n$ onde cada posição (i, j) em R^l, denotada por R^l_{ij}, contém um valor no intervalo $[0, 1]$, o qual reflete o quanto a alternativa x_i é considerada melhor que a alternativa x_j de acordo com o tomador de decisão d_l.

Saída: Um ranking $r : X \to \mathbb{N}_n$, significando que uma alternativa $x \in X$ é melhor que uma alternativa $y \in X$, denotado por $x > y$, sempre que $r(x) < r(y)$ e $r(x) = r(y)$ significa que o método foi incapaz de determinar se x é uma alternativa pior ou melhor que y, denotado por $x \sim y$.

Passo 1. Agregar as relações de preferência fuzzy de cada tomador de decisão em uma única relação de preferência fuzzy R^c, chamada de relação de preferência coletiva, usando o operador de agregação média ponderada considerando Λ como vetor de pesos. Assim, R^c é uma matriz de dimensão $n \times n$ onde a posição $R^c_{k,i}$ contém a média ponderada das preferências dos tomadores de decisão para a alternativa x_i sobre a alternativa x_j, ou seja,

$$R^c_{i,j} = M_\Lambda(R^1_{i,j}, \ldots, R^m_{i,j})$$

Passo 2. Obter a pontuação final de cada alternativa x_i, que denotaremos por V_i, com $i = 1, \ldots, n$, “somando os votos”, usando a média aritmética, em R^c para x_i, ou seja,

$$V_i = M(R^c_{i,1}, \ldots, R^c_{i,i-1}, R^c_{i,i+1}, \ldots, R^c_{i,n})$$

Passo 3. Determinar um ranking das alternativas a partir das pontuações finais de cada alternativa de tal manera que $x_i > x_j$ quando $V_i > V_j$ e $x_i \sim x_j$ quando $V_i = V_j$. A função de saída $r : X \to \{1, \ldots, n\}$ é definida por $r(x_i) = j$ sss V_i é a j-ésima maior pontuação final.

Exemplo Ilustrativo do Segundo Método

Compararemos o uso do nosso método com o proposto por Z. Xu em [62].

Em [59] foi proposto um ambiente de hierarquia analítica baseada em técnicas de tomada de decisão fuzzy de múltiplos critérios para ajudar aos bancos a escolher estratégias de fusão com base em seis critérios seguintes: desempenho da gestão, direitos e interesses dos funcionários, orientação ao cliente, análise financeira, política financeira do governo e gestão de risco. Em [62] foi considerado um comitê composto por três tomadores de decisão, cada um advindo de uma área

Tabela 6: Relação de preferência do tomador de decisão d_1 em [62]

R^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.5	0.45	0.3	0.4	0.75	0.25
x_2	0.25	0.5	0.2	0.3	0.25	0.1
x_3	0.4	0.35	0.5	0.35	0.5	0.25
x_4	0.45	0.45	0.45	0.5	0.65	0.25
x_5	0.15	0.3	0.2	0.15	0.5	0.4
x_6	0.6	0.55	0.4	0.65	0.45	0.5

Tabela 7: Relação de preferência do tomador de decisão d_2 em [62]

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.5	0.4	0.35	0.45	0.65	0.3
x_2	0.2	0.5	0.15	0.35	0.15	0.35
x_3	0.35	0.25	0.5	0.3	0.6	0.35
x_4	0.35	0.35	0.45	0.5	0.55	0.15
x_5	0.25	0.4	0.15	0.25	0.5	0.25
x_6	0.55	0.35	0.5	0.6	0.45	0.5

estratégica de decisão diferente, os quais comparam individualmente cada par de critérios e expressam suas preferências através de um valor intuicionista de Atanassov intervalar, a fim de incluir a sua incerteza e imprecisão na avaliação. Foi considerado um peso para cada tomador de decisão

Condições Iniciais: Há seis alternativas ($X = \{x_1, \ldots, x_6\}$), três tomadores de decisão (d_1, d_2 e d_3) com suas respectivas relações de preferências fuzzy (R^1, R^2 e R^3) apresentadas nas tabelas 6, 7 e 8, respectivamente, e o vetor de pesos $\Lambda = (0.4, 0.3, 0.3)$ para os tomadores de decisão. Observe que essas três relações de preferência fuzzy satisfazem o princípio de aditividade N-recíproca com respeito à negação forte de Zadeh. Cabe salientar, que de forma análoga ao exemplo ilustrativo do método anterior, os valores originais das tabelas 6, 7 e 8, não são valores fuzzy, mas valores intuicionistas intervalares, e aqui nós só consideramos a média do do intervalo que representa o grau de pertinência. Assim, a menos dessa transformação dos graus de pertinencias, nos consideramos as mesmas condições iniciais de Xu em [62].

Passo 1: Relação de preferência coletiva R^c é apresentada na Tabela 9.

Tabela 8: Relação de preferência do tomador de decisão d_3 em [62]

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.5	0.6	0.4	0.25	0.65	0.4
x_2	0.15	0.5	0.35	0.2	0.3	0.25
x_3	0.3	0.35	0.5	0.5	0.45	0.25
x_4	0.4	0.35	0.35	0.5	0.45	0.5
x_5	0.1	0.4	0.15	0.3	0.5	0.45
x_6	0.45	0.55	0.35	0.25	0.4	0.5

Tabela 9: Relação de Preferência fuzzy coletiva.

R^c	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0.5	0.48	0.345	0.37	0.69	0.31
x_2	0.205	0.5	0.23	0.285	0.235	0.22
x_3	0.355	0.32	0.5	0.38	0.515	0.28
x_4	0.405	0.39	0.42	0.5	0.56	0.295
x_5	0.165	0.36	0.17	0.225	0.5	0.37
x_6	0.54	0.49	0.415	0.515	0.435	0.5

Por exemplo,

$$\begin{aligned} R^c_{1,2} &= 0.4 \cdot 0.45 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 \\ &= 0.18 + 0.12 + 0.18 \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

Passo 2: O vetor V com a pontuação final de cada alternativa é o seguinte:

- $V_1 = 0.439$;
- $V_2 = 0.235$;
- $V_3 = 0.37$;
- $V_4 = 0.414$;
- $V_5 = 0.258$ e
- $V_6 = 0.464$.

Por exemplo, o cálculo de V_1 foi feito como segue:

$$\begin{aligned} V_1 &= \tfrac{0.48+0.347+0.37+0.69+0.31+0.205}{5} \\ &= \tfrac{2.195}{5} \\ &= 0.439 \end{aligned}$$

Passo 3: O ranking das alternativas baseado na pontuação final de cada alternativa é o seguinte

$$x_6 > x_1 > x_4 > x_3 > x_5 > x_2 \tag{8}$$

Já o ranking obtido por Xu em [62] foi

$$x_6 > x_1 > x_4 > x_3 > x_2 > x_5 \tag{9}$$

Observação 3. Cabe salientar que em [15], este mesmo problema de tomada de decisão com as relações de preferências dos especialistas idênticas às do problema original, foi resolvido de tres maneiras diferentes, e duas delas coincidiram com o ranking de Xu e a outra com o ranking obtido aqui. Assim, os rankings obtidos concordam nas quatro melhores alternativas, ou seja, em que $x_6 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$. Porém, no ranking obtido com o método de Xu a alternativa x_2 é melhor que x_5 enquanto com o método proposto chegamos ao oposto, ou seja que x_5 é melhor que x_2. No entanto, de acordo com as Tabelas 6, 7 e 8, $R^1_{2,5} = 0.25 \leq 0.3 = R^1_{5,2}$, $R^2_{2,5} = 0.15 \leq 0.4 = R^2_{5,2}$ e $R^3_{2,5} = 0.3 \leq 0.4 = R^3_{5,2}$. Portanto, todos os três tomadores de decisão coincidem em que a alternativa x_5 é melhor do que a alternativa x_2 e isto deveria ter sido refletido no ranking final. Desta forma podemos concluir que o ranking obtido por nosso método é mais correto que o obtido por Xu.

7 Em Processamento Digital de Imagens

Existem diversas aplicações de funções de agregação em processamento digital de imagens, como por exemplo as apresentadas em [21, 28, 40, 48]. Em particular em [20, 21] são usadas funções de agregação de para reduzir ou comprimir imagens, aumentar imagens e na remoção de alguns tipos de ruidos. Por exemplo, na redução de imagens, é usada uma função de agregação para reduzir fragmentos da imagens (tipicamente de 3×3 pixel) num único pixel.

As funções de agregação com melhor desempenho foram a méia aritmética e uma função de agregação linear introduzida nesse artigo, e que tem como principal característica que os pesos variam conforme os valores das entradas, ou seja cada entrada tem seu próprio vetor de pesos. Este tipo de função de agregação são conhecidas na literatura como funções de agregação de mistura e foram introduzidas por Pereira em [50, 51].

Neste minicurso veremos esta função de agregação e sua aplicação em processamento digital de imagens em detalhes.

Referências

[1] AHN, B. On the properties of owa operator weights functions with constant level of orness. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems 14* (2006), 511–515.

[2] ALONSO, S., HERRERA-VIEDMA, E., CHICLANA, F., AND HERRERA, F. A web based consensus support system for group decision making problems and incomplete preferences. *Information Sciences 180* (2010), 4477–4495.

[3] ALSINA, C., TRILLAS, E., AND VALVERDE, L. On non-distributive logical connectives for fuzzy set theory. *BUSEFAL 3* (1980), 18–29.

[4] ATANASSOV, K., AND GARGOV, G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 31* (1989), 343–349.

[5] BEDREGAL, B. On interval fuzzy negations. *Fuzzy Sets and Systems 161* (2010), 2290–2313.

[6] BEDREGAL, B., AND TAKAHASHI, A. The best interval representations of t-norms and automorphisms. *Fuzzy Sets and Systems 157* (2006), 3220–3230.

[7] BELIAKOV, G., BUSTINCE, H., AND CALVO, T. *A Practical Guide to Averaging Functions*, vol. 329 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin, 2016.

[8] BELIAKOV, G., PRADERA, A., AND CALVO, T. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, Berlin, 2007.

[9] BOJADZIEV, G., AND BOJADZIEV, M. *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Managenment*, 2nd ed. World Scientific Publishing, New Jersey, 2007.

[10] BORDIGNON, F., AND GOMIDE, F. Uninorm based evolving neural networks and approximation capabilities. *Neurocomputing 127*, 1 (2014), 13–20.

[11] BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., PAGOLA, M., FERNANDEZ, J., XU, Z., BEDREGAL, B., J. MONTERO, H. H., HERRERA, F., AND BAETS, B. D. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems 24*, 1 (2016), 179–194.

[12] BUSTINCE, H., BURILLO, P., AND SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems 134*, 2 (2003), 209–229.

[13] CHEN, S., AND NIOU, S. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy preference relations. *Expert Systems with Applications 38*, 4 (2011), 3865–3872.

[14] CHICLANA, F., HERRERA-VIEDMA, E., ALONSO, S., AND PEREIRA, R. *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, aggregation and models*. Springer, Berlin, 2008, ch. Preference and consistency issues in group decision making.

[15] DA SILVA, I. *Tomada de Decisão em Grupo e Multi-Atributos Baseada na Lógica Fuzzy Intuicionista de Atanassov Intervalarmente Valorada*. PhD thesis, PPgEEC, UFRN,, Natal-RN, 2016.

[16] DA SILVA, I., BEDREGAL, B., SANTIAGO, R., AND NETO, A. D. A new method for interval-valued intuitionistic group decision making. In *Recentes Avanços em Sistemas Fuzzy* (São Carlos-SP, 2012), SBMAC, pp. 282–294. Segundo Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, Natal-RN.

[17] DUJMOVIC, J. Two integrals related to means. *Publications de la Faculte d'Electrotechnique de l'Universite à Belgrade* (1973), 231–232.

[18] DUJMOVIC, J. Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation. *Publications de la Faculte d'Electrotechnique de l'Universite à Belgrade*, 483 (1974), 147–158.

[19] E. HÜLLERMEIER, K. B. Learning valued preference structures for solving classification problems. *Fuzzy Sets and Systems 159*, 18 (2008), 2337–2352.

[20] FARIAS, A., BEDREGAL, B., AND SANTIAGO, R. Some properties of generalized mixture functions. In *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ)* (Vancouver, 2016), pp. 288–293.

[21] FARIAS, A., COSTA, V., LOPES, L., BEDREGAL, B., AND SANTIAGO, R. A method for image reduction based on a generalization of ordered weighted averaging functions. *CoRR abs/1601.03785* (2016).

[22] FERNÁNDEZ, A., CALDERÓN, M., BARRENECHEA, E., BUSTINCE, H., AND HERRERA, F. Solving multi-class problems with linguistic fuzzy rule based classification systems based on pairwise learning and preference relations. *Fuzzy Sets and Systems 161* (2010), 3064–3080.

[23] FERNÁNDEZ SALIDO, J., AND MURAKAMI, S. Extending Yager's orness concept for the OWA aggregators to other mean operators. *Fuzzy Sets and Systems 139* (2003), 515–542.

[24] FODOR, J. Contrapositive symmetry of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems 69*, 2 (1995), 141–156.

[25] FODOR, J. Left-continuous t-norms in fuzzy logic: An overview. *ACTA Polytechnica Hungarica 1*, 2 (2004).

[26] FODOR, J., AND ROUBENS, M. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Theory and Decision Library. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1994.

[27] GONG, Z., LI, L., CAO, J., AND ZHOU, F. On additive consistent properties of the intuitionistic fuzzy preference relation. *Int. J. of Information Technology & Decision Making 9*, 6 (2010), 1009–1025.

[28] GUERRA, C., JURIO, A., BUSTINCE, H., AND LOPEZ-MOLINA, C. Multichannel generalization of the upper-lower edge detector using ordered weighted averaging operators. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 27*, 3 (2014), 1433–1443.

[29] HERRERA-VIEDMA, E., CHICLANA, F., HERRERA, F., AND ALONSO, S. Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B 37*, 1 (2007), 176–189.

[30] HÜLLERMEIER, E., AND VANDERLOOY, S. Combining predictions in pairwise classification: An optimal adaptive voting strategy and its relations to weighted voting. *Pattern Recognition 43*, 1 (2010), 128–142.

[31] JAHANSHAHLOO, G., LOTFI, F., AND IZADIKHAH, M. Extension of the topsis method for decision-making problems with fuzzy data. *Applied Mathematics and Computation 181* (2006), 1544–1551.

[32] JENEI, S. How to construct left-continuous triangular norms-state of the art. *Fuzzy Sets and Systems 143* (2004), 27–45.

[33] JIN, L., KALINA, M., AND QIAN, G. Fuzzy orness measure and new orness axioms. *Kybernetika 51*, 4 (2015), 712–723.

[34] KISHOR, A., SINGH, A. K., AND PAL, N. R. Orness measure of owa operators: A new approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 22*, 4 (2014), 1039–1045.

[35] KOLESÁROVÁ, A. A note on archimedean triangular norms. *BUSEFAL 80* (1999), 57–60.

[36] LEE, H., AND YEH, C. Fuzzy multi-criteria decision making based on fuzzy preference relation. *Lecture Notes in Computer Science 5178* (2008), 980–985.

[37] LEVITIN, G. Evaluating correct classification probability for weighted voting classification with plurality voting. *European Journal of Operational Research 141* (2002), 596–607.

[38] LI, D., AND YANG, J. Fuzzy linear programming technique for multiattribute group decision making in fuzzy environments. *Information Sciences 158* (2004), 263–275.

[39] LIMA, E. *Curso de Análise*, vol. 1 of *Projeto Euclides*. IMPA, Rio de Janeiro, 1982.

[40] LIMA, L., BEDREGAL, B., BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., AND DA ROCHA, M. An interval extension of homogeneous and pseudo-homogeneous t-norms and t-conorms. *Information Sciences 355–356* (2016), 328–347.

[41] LIU, X. W. Models to determine parameterized ordered weighted averaging operators using optimization criteria. *Information Sciences 190* (2012), 27–55.

[42] LUCCA, G., SANZ, J., DIMURO, G., BEDREGAL, B., MESIAR, R., KOLESÁROVÁ, A., AND BUSTINCE, H. Preaggregation functions: Construction and an application. *IEEE Trans. Fuzzy Systems 24*, 2 (2016), 260–272.

[43] MARICHAL, J. *Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge*, vol. 51 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica Verlag, Heidelberg, 2000, ch. Behavioral analysis of aggregation in multicriteria decision aid, pp. 153–178.

[44] MAYOR, G., AND CALVO, T. Extended aggregation functions. In *IFSA'97* (Prague, 1997), vol. 1, pp. 281–285.

[45] MENGER, K. Statistical metrics. *Proc. Nat. Academic Science 28*, 12 (1942), 535–537.

[46] MESIAR, R., KOLESÁROVÁ, A., BUSTINCE, H., DIMURO, G., AND BEDREGAL, B. Fusion functions based discrete Choquet-like integrals. *European Journal of Operational Research 252*, 2 (2016), 601–609.

[47] PATERNAIN, D., CAMPIÓN, M., MESIAR, R., PERFILIEVA, I., AND BUSTINCE, H. Internal fusion functions. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* (2016). submetido.

[48] PATERNAIN, D., FERNANDEZ, J., BUSTINCE, H., MESIAR, R., AND BELIAKOV, G. Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems 261* (2015), 87–111.

[49] PATERNAIN, D., JURIO, A., BARRENECHEA, E., BUSTINCE, H., BEDREGAL, B., AND SZMIDT, E. An alternative to fuzzy methods in decision-making problems. *Expert Systems with Applications 39* (2012), 7729–7735.

[50] PEREIRA, R., AND RIBEIRO, R. Aggregation with generalized mixture operators using weighting functions. *Fuzzy Sets and Systems 137*, 1 (2003), 43–58.

[51] PEREIRA, R. A. M., AND PASI, G. On non-monotonic aggregation: mixture operators. In *Proc. 4th Meeting of the EURO Working Group on Fuzzy Sets (EUROFUSE'99) and 2nd Internat. Conf. on Soft and Intelingent Computing (SICâ99)* (Budapest, Hungary, 1999).

[52] ROJAS, K., GÓMEZ, D., MONTERO, J., AND RODRÍGUEZ, J. Strictly stable families of aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems 228* (2013), 44–63.

[53] SCHILLING, R. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[54] SCHWEIZER, B., AND SKLAR, A. Espaces metriques aleatoires. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 247* (1958), 2092–2094.

[55] SCHWEIZER, B., AND SKLAR, A. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math. Dedrecen 8* (1961), 169–186.

[56] TRIANTAPHYLLOU, E., AND LIN, C. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision making methods. *Int. J. of Approximate Reasoning 14*, 4 (1996), 281–310.

[57] TRILLAS, E. Sobre funciones de negación en la teoria de conjuntos difusos. *Stochastica 3* (1979), 47–59.

[58] WAN, S., AND DONG, J. A possibility degree method for interval-valued intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision making. *Computer and System Sciences 80* (2014), 237–256.

[59] WANG, T., AND LIN, Y. Applying the consistent fuzzy preference relations to select merger strategy for commercial banks in new financial environments. *Expert Systems with Applications 36* (2009), 7019–7026.

[60] WEI, G. Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making. *Applied Soft Computing 10*, 2 (2010), 423–431.

[61] WU, J., XIONG, R., AND CHICLANA, F. Uninorm trust propagation and aggregation methods for group decision making in social network with four tuple information. *Knowledge-Based Systems 96*, 1 (2016), 29–39.

[62] XU, Z. A method based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making. *Information Sciences 180* (2010), 181–190.

[63] XU, Z. *Uncertain Multi-Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer, Heidelberg, 2015.

[64] XU, Z., AND HU, H. Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making. *Int. J. of Information Technology & Decision Making 9*, 2 (2010), 267–280.

[65] YAGER, R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 1 (1988), 183–190.

[66] YAGER, R. Quantifier guided aggregation using OWA operators. *Int. J. Intelligent Systems 11* (1996), 49–73.

[67] YAGER, R., AND KREINOVICH, V. Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling. *Fuzzy Sets and Systems 140* (2003), 331–339.

[68] YAGER, R., AND RYBALOV, A. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets Systems 80* (1996), 111–120.

[69] YAGER, R., AND RYBALOV, A. Noncommutative self-identity aggregation. *Fuzzy Sets Systems 85* (1997), 73–82.

[70] ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control 8* (1965), 338–353.