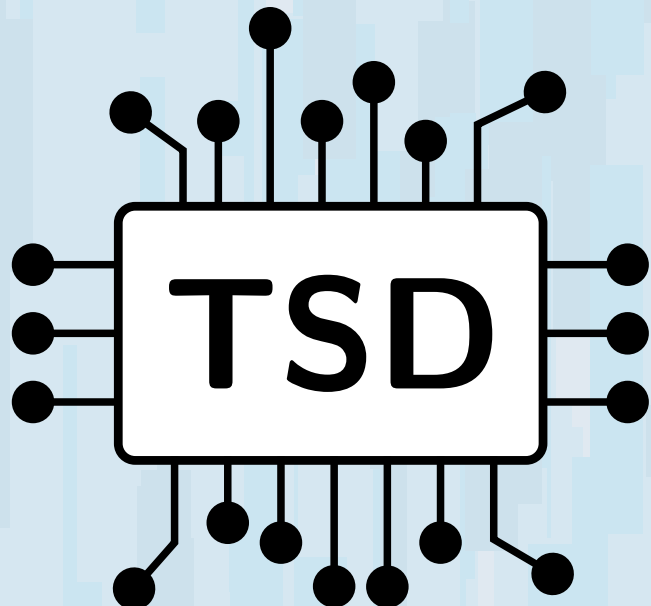


Lúcio T. Santos & Ricardo Biloti

TRATAMENTO DE SINAIS DIGITAIS



23.02.2026

“Tratamento de Sinais Digitais: Notas de aula” de Lúcio T. Santos e Ricardo Biloti é licenciado sob os termos da licença [Creative Commons – Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR) [http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR].

Você tem o direito de:

Compartilhar – copiar e redistribuir o material em qualquer suporte ou formato.

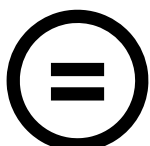
O licenciante não pode revogar estes direitos, desde que você respeite os termos da licença.

Você deve respeitar os termos:

Atribuição – Você deve dar o crédito apropriado, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram feitas. Você deve fazê-lo em qualquer circunstância razoável, mas de forma alguma que sugira que o licenciante apoia você ou o seu uso.



Não Comercial – Você não pode usar o material para fins comerciais.



Sem Derivações – Se você remixar, transformar ou criar a partir do material, você não pode distribuir o material modificado.

Sem restrições adicionais – Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

Avisos:

Você não tem de cumprir com os termos da licença relativamente a elementos do material que estejam no domínio público ou cuja utilização seja permitida por uma exceção ou limitação que seja aplicável.

Não são dadas quaisquer garantias. A licença pode não lhe dar todas as autorizações necessárias para o uso pretendido. Por exemplo, outros direitos, tais como direitos de imagem, de privacidade ou direitos morais, podem limitar o uso do material.

Conteúdo

1	Série de Fourier	1
1.1	Funções periódicas	1
1.2	Polinômios trigonométricos	3
1.3	Série de Fourier	5
1.4	Cálculo da série de Fourier	6
1.5	Exercícios propostos	7
2	Transformada de Fourier	9
2.1	Dedução informal	9
2.2	Distribuições e a Distribuição Delta de Dirac	12
2.3	Funções de Heaviside e sinal	15
2.4	Exercícios propostos	18
3	Convolução	20
3.1	Exercícios propostos	21
4	Teorema de Shannon	23
4.1	Função de banda limitada	23
4.2	Teorema da Amostragem de Shannon	24
4.3	Exercícios propostos	26
5	Transformada de Fourier Discreta	28
5.1	Aliasing na DFT	31
5.2	Transformada de Fourier Rápida	35
5.3	Convolução discreta	36
5.4	Convolução cíclica	37
5.5	Compressão com Fourier	40
5.6	Exercícios propostos	42
6	Filtros	44
6.1	Filtros convolucionais	44
6.2	Filtro passa baixa	45
6.3	Filtro passa banda	47
6.4	Tipos de filtros passa baixa	47
6.5	Transformada de Fourier com janela	51

6.6	Exercícios propostos	56
7	Sinais analíticos	57
7.1	Transformada de Hilbert	57
7.2	Propriedades da transformada de Hilbert	60
7.3	Tempo complexo	60
7.4	Aplicação em Sísmica de Reflexão	61
7.5	Exercícios propostos	63
8	Transformada de Fourier 2D	64
8.1	Propriedades básicas	64
8.2	Casos particulares	65
8.3	Exercícios propostos	68
9	Wavelets	69
9.1	Introdução	69
9.2	Funções de Haar	70
9.3	Decomposição e reconstrução	73
9.4	Wavelets de Daubechies	75
9.5	Exercícios propostos	78
	Bibliografia	79
A	Detalhes dos capítulos	80
B	Referência rápida	100
B.1	Definições e Identidades	100
B.2	Transformadas de Fourier	101
	Índice	102

Capítulo 1

Série de Fourier

1.1 Funções periódicas

Definição 1.1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma **função periódica**, com **período** T , se

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se f e g são funções periódicas, com período T , então valem as seguintes propriedades:

- (a) $f + g$ é periódica com período T .
- (b) λf é periódica com período T .
- (c) se f é diferenciável, então f' é periódica com período T .
- (d)

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

A demonstração das propriedades (a) e (b) é simples. Para (c), veja que

$$f'(t + T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + T + h) - f(t + T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = f'(t).$$

Para (d), observe que

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T} f(t) dt \\
 &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(t+T) dt \\
 &= -\int_0^a f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\
 &= \int_0^T f(t) dt.
 \end{aligned}$$

Exercício 1.1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções periódicas. Dê exemplos onde a função $(f + g)$

(a) é periódica;

(b) não é periódica.

Isto é uma contradição com o exposto no início desta seção?



Exercício 1.2 Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções periódicas com períodos T_1 e T_2 , respectivamente. Mostre que se existirem inteiros m e n tais que $mT_1 = nT_2$ então $f_1 + f_2$ é periódica com período mT_1 .



Definição 1.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica. Dizemos que T é o **período fundamental** de f , se T é o menor real positivo para o qual vale que

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.1 Para função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \sin(t)$, 2π é período, assim como qualquer múltiplo inteiro de 2π , mas o período fundamental é $T = 2\pi$.

Seja $P_f = \{T \in \mathbb{R} \mid T \text{ é período de } f \text{ e } T > 0\}$, isto é, P_f é o conjunto de todos os períodos positivos de f . O período fundamental de f também pode ser caracterizado como valor mínimo de P_f , quando existir.

Exercício 1.3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = c$, para $c \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma função periódica. Verifique que f não tem período fundamental.



Definição 1.3 A taxa de repetição de um sinal periódico é denominada **frequência** e representada por f . Se T é o período fundamental do sinal, então

$$f = \frac{1}{T}.$$

Quando T é medido em segundos, a unidade de medida de f é **Hertz**.

Definição 1.4 Se f é a frequência de um sinal periódico, definimos a **frequência angular** como

$$\omega = 2\pi f.$$

1.2 Polinômios trigonométricos

Seja

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad (1.1)$$

onde

$$\omega_n = 2\pi n / T. \quad (1.2)$$

Dizemos que f_N é um *polinômio trigonométrico*.

As funções $\cos(\omega_n t)$, $n \geq 0$, e $\sin(\omega_n t)$, $n \geq 1$, são ortogonais, com respeito ao *produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.3)$$

Para verificar essa informação é preciso mostrar que (veja A.4):

- (a) $\langle 1, \cos(\omega_n t) \rangle = 0$, para $n \geq 1$.
- (b) $\langle 1, \sin(\omega_n t) \rangle = 0$, para $n \geq 1$.
- (c) $\langle \cos(\omega_m t), \cos(\omega_n t) \rangle = 0$, para $m \neq n$.
- (d) $\langle \sin(\omega_m t), \sin(\omega_n t) \rangle = 0$, para $m \neq n$.
- (e) $\langle \cos(\omega_m t), \sin(\omega_n t) \rangle = 0$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Também é possível mostrar que essas funções tem norma $\sqrt{T/2}$, para $n \geq 1$ e $\|1\| = \sqrt{T}$ (veja A.5). Desta forma, se f_N é definido como em (1.1), então

$$\langle f_N, 1 \rangle = \frac{a_0}{2} \langle 1, 1 \rangle = \frac{a_0}{2} T \Rightarrow a_0 = \frac{2}{T} \langle f_N, 1 \rangle.$$

$$\begin{aligned} \langle f_N, \cos(\omega_n t) \rangle &= a_n \langle \cos(\omega_n t), \cos(\omega_n t) \rangle \\ &= a_n \frac{T}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \langle f_N, \cos(\omega_n t) \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle f_N, \sin(\omega_n t) \rangle &= b_n \langle \sin(\omega_n t), \sin(\omega_n t) \rangle \\ &= b_n \frac{T}{2} \Rightarrow b_n = \frac{2}{T} \langle f_N, \sin(\omega_n t) \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Assim, chegamos às fórmulas para os coeficientes em (1.1), conhecidos como *coeficientes de Fourier*,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.5)$$

Um polinômio trigonométrico também pode ser reescrito em sua *forma complexa*, por meio das identidades

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) &= a_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} \\ &= \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\omega_n t}. \end{aligned}$$

Logo (1.1) fica

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\omega_n t} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-N}^{-1} \left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{i\omega_n t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Considere c_n definido como

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt. \quad (1.7)$$

Para $n \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt - i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt = \frac{a_n - ib_n}{2}. \end{aligned}$$

Para $n < 0$, temos que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt - i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_{-n} t) dt + i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_{-n} t) dt = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, \end{aligned}$$

onde usamos que $\omega_n = 2\pi n/T = -2\pi(-n)/T = -\omega_{-n}$. Portanto, a expressão (1.6) fica

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}. \quad (1.8)$$

De fato, podemos ver que (1.7) é

$$c_n = \frac{\langle f, e^{i\omega_n t} \rangle}{\langle e^{i\omega_n t}, e^{i\omega_n t} \rangle}.$$

Teorema 1.1 (Teorema de Parseval) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica com período T . Se $\|f - f_N\| \rightarrow 0$, então*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

Este teorema está demonstrado em A.6.

1.3 Série de Fourier

Teorema 1.2 (Teorema de Dirichlet (Chu, 2008)) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se*

- (a) *f é limitada em qualquer intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$,*
- (b) *f tem apenas um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo $[a, b]$,*
- (c) *f tem no máximo um número finito de descontinuidades em $[a, b]$, sendo cada uma delas uma descontinuidade de salto, e*
- (d) *f é periódica, com período T ,*

então, para cada $t \in \mathbb{R}$ onde f seja contínua

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad (1.9)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.11)$$

Além disso, se t_ é um ponto de descontinuidade de f , então vale que*

$$\frac{f(t_*^+) + f(t_*^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t_*) + b_n \sin(\omega_n t_*).$$

1.4 Cálculo da série de Fourier

Observe que $\cos(\omega_n t)$ são funções pares e $\sin(\omega_n t)$ são funções ímpares. Logo, se f for uma função par, o produto $f(t) \sin(\omega_n t)$ será função ímpar e portanto os coeficientes b_n são nulos, por serem o resultado da integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico. Por outro lado, se f for uma função ímpar, o produto $f(t) \cos(\omega_n t)$ será função ímpar e portanto os coeficientes a_n são nulos. Isto pode ser explorado para obter séries de Fourier apenas com termos pares ou ímpares, dependendo da forma com a função f for *estendida*.

Tome o caso de $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t$. f não é periódica, mas podemos estendê-la como $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com período $T = 2L$, tal que $f_1(t) = t$, para $t \in (-L, L]$. Desta forma, no intervalo $(-L, L)$, f_1 é uma função ímpar e sua série de Fourier é dada por (veja A.7)

$$f(t) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right). \quad (1.12)$$

Na Figura 1.1 é exibida a soma parcial da série de Fourier com 20 termos.



Figura 1.1: Em preto, está o gráfico da extensão ímpar de função $f(t) = t$, com $L = 2$ e, em vermelho, está o gráfico da soma parcial da série de Fourier, com 20 termos.

A extensão par para f é $f_2(t) = |t|$, para $t \in [-L, L]$, com período $2L$. Neste caso sua série de Fourier é (veja A.8)

$$f(t) \sim \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{L}\right). \quad (1.13)$$

Na Figura 1.2 é exibida a soma parcial da série de Fourier com os primeiros 5 termos não nulos.

Observe que na extensão par o erro ao truncar a série de Fourier é claramente menor. Veremos que isto se deve à extensão par ser contínua. Logo, uma forma de obter uma série de senos para f , que não apresente as reverberações vistas na Figura 1.1 é considerar

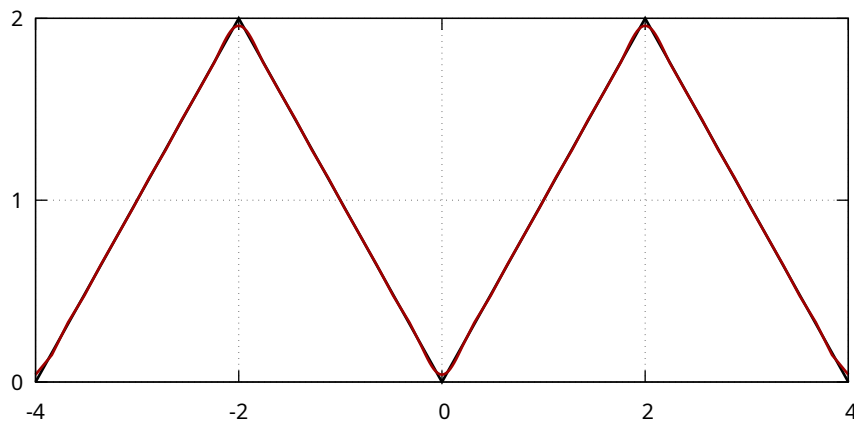


Figura 1.2: Em preto, está o gráfico da extensão par da função $f(t) = t$, com $L = 2$ e, em vermelho, está o gráfico da soma parcial da série de Fourier, com os primeiros 5 termos não nulos.

a extensão $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com período $4L$, dada por

$$f_3(t) = \begin{cases} -2L - t, & -2L < t \leq -L, \\ t, & -L < t \leq L, \\ 2L - t, & L < t \leq 2L. \end{cases}$$

Nesta extensão, f é ímpar em $[-2L, 2L]$, porém contínua. Sua série de Fourier fica (veja A.9)

$$f(t) \sim \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2k-1)\pi t}{2L} \right).$$

Na Figura 1.3 é exibida a soma parcial da série de Fourier com os primeiros 5 termos não nulos.

1.5 Exercícios propostos

Exercício 1.4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Mostre que f é periódica, mas não tem período fundamental.

Exercício 1.5 Mostre que $\{e^{i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de funções ortogonais entre si, com respeito ao produto interno (1.3).

Exercício 1.6 Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = t^2$. Utilize a série de Fourier de f para provar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

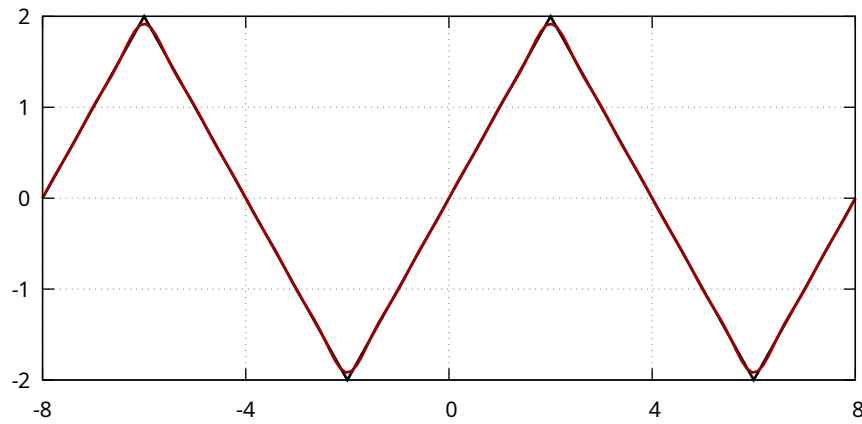


Figura 1.3: Em preto, está o gráfico da extensão ímpar da função $f(t) = t$, com $L = 2$ e, em vermelho, está o gráfico da soma parcial da série de Fourier, com os primeiros 5 termos não nulos.

Exercício 1.7 Utilize a série de Fourier para mostrar que para $\theta \in (-\pi, \pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\theta}{2}.$$

Por que a expansão não é válida para $|\theta| = \pi$?

Exercício 1.8 Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^2$.

- Estenda convenientemente f para o intervalo $[-1, 1]$ para encontrar uma série de Fourier para f em termos apenas de cossenos.
- Estenda convenientemente f para o intervalo $[-1, 1]$ para encontrar uma série de Fourier para f em termos apenas de senos.
- Faça o gráfico da séries de Fourier truncadas para entender as diferenças de convergência.

Capítulo 2

Transformada de Fourier

2.1 Dedução informal

Se $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função nas hipóteses do Teorema 1.1, vimos que seus coeficientes de Fourier são

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}.$$

O que acontece se $T \rightarrow \infty$? Lembrando que $\omega_n \equiv n\Delta\omega$, com $\Delta\omega = 2\pi/T$, veja que

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \right] e^{i\omega_n t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(\tau) e^{-in\Delta\omega \tau} d\tau \right] e^{in\Delta\omega t}.$$

Observe que $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega = 0$ e que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \Delta\omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n\Delta\omega).$$

Logo, do ponto de vista formal, quando $T \rightarrow \infty$,

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.1)$$

onde

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Dizemos que $\hat{f}$ é a *Transformada de Fourier* de f , assim como f é a *Transformada de Fourier inversa* de $\hat{f}$.

Para que as expressões em (2.1) e (2.2) façam sentido é preciso discutir para que classe de funções as integrais impróprias nessas expressões convergem.

Definição 2.1 O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existem é chamado de **espaço das funções integráveis** e denotado por $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$.

Se $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$, diremos que f é uma função $\mathcal{L}^1$. Na área de Sinais, toda função $\mathcal{L}^1$ também é chamada de um **sinal estável**. Dizer que as integrais impróprias existem é dizer que os limites abaixo existem, para M e N independentes.

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(t) dt, \quad \text{e} \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(t)| dt.$$

Toda função $\mathcal{L}^1$ tem transformada de Fourier. Será que a transformada de Fourier de uma função $\mathcal{L}^1$ é uma função $\mathcal{L}^1$? Infelizmente a resposta é não. Veja o exercício a seguir.

Exercício 2.1 Seja

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a, \\ 0, & |t| \geq a. \end{cases}$$

Compute a transformada de Fourier de f . Verifique que $\hat{f}$ não é uma função $\mathcal{L}^1$. 

Seja a função **seno cardinal**, $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Perceba que para a função f do exercício anterior, $\hat{f}(\omega) = 2a \text{sinc}(\omega a / \pi)$.

Exercício 2.2 Mostre que a função seno cardinal (a) se anula nos inteiros não nulos e (b) é contínua. 

Exercício 2.3 Analise o comportamento de f e $\hat{f}$ com relação ao parâmetro a . 

Exercício 2.4 Sejam $b > 0$ e $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq b, \\ 0, & |\omega| > b. \end{cases}$$

Compute a transformada de Fourier inversa. 

Definição 2.2 O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que a integral imprópria de $|f(t)|^2$ existe é chamado **espaço das funções quadrado integráveis** e denotado por $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$.

Se $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$, diremos que f é uma função $\mathcal{L}^2$. Na área de Sinais, toda função $\mathcal{L}^2$ também é chamada de um **sinal de energia finita**.

Toda função $\mathcal{L}^2$ tem transformada de Fourier e sua transformada é também uma função $\mathcal{L}^2$.

Utilizamos também a seguinte notação para transformada de Fourier e transformada inversa de Fourier

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f] \quad \text{e} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}].$$

Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \hat{f}(0) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega = 2\pi f(0).$$

Exemplo 2.1 Sejam $a > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = e^{-a|t|}$. Compute sua transformada de Fourier e analise seu comportamento com relação a variação de a .

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega - a} + \frac{1}{i\omega + a} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = e^{-a^2 t^2}$, $a \neq 0$. Compute sua transformada de Fourier.

Pela definição de transformada de Fourier,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} dt.$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} \frac{d}{d\omega} (e^{-i\omega t}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} (-it) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} (-2a^2 t) e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{-a^2 t^2}) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2a^2} \left[e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} (-i\omega) e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= -\frac{\omega}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} dt = -\frac{\omega}{2a^2} \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Ou seja, $\hat{f}$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) + \frac{\omega}{2a^2} \hat{f}(\omega) = 0,$$

cujas soluções são

$$\hat{f}(\omega) = ce^{-\omega^2/(4a^2)}.$$

Para determinar a constante c , observe que

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$$

Assim, concluímos que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\omega^2/(4a^2)}.$$

Acima, usamos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Com efeito,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi.$$

Como $I > 0$, conclui-se que $I = \sqrt{\pi}$.

Uma última propriedade muito útil da transformada de Fourier é sua ação sobre derivadas. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}^2$ com f' também $\mathcal{L}^2$, então

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + (i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega) \hat{f}(\omega),$$

ou seja,

$$\widehat{f'}(\omega) = (i\omega) \hat{f}(\omega).$$

De maneira geral, se f for n vezes diferenciável,

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

2.2 Distribuições e a Distribuição Delta de Dirac

Distribuição é uma generalização do conceito de função. Do ponto de vista formal, uma distribuição não é uma função, mas sim **um operador sobre um espaço de funções**.

Seja $C_0^\infty(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais a valores reais, com suporte compacto e infinitamente diferenciáveis. Este conjunto é denominado o **conjunto das funções teste de Schwartz**. Qualquer função linear $d : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear e conhecida como uma distribuição. A notação utilizada para representar a aplicação de uma distribuição d a uma função teste f é $\langle d, f \rangle$.

Exemplo 2.3 Seja $d : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \mapsto \langle d, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt$. d é uma distribuição, na medida que é um funcional linear (verifique!).

Exemplo 2.4 Seja $d : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle d, f \rangle = \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

Verifique que d é uma distribuição.

Com efeito, se $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle d, f + g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) + g(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = \langle d, f \rangle + \langle d, g \rangle,$$

e, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\langle d, \alpha f \rangle = \int_{-1}^1 \alpha f(t) dt = \alpha \int_{-1}^1 f(t) dt = \alpha \langle d, f \rangle.$$

Logo d é linear.

Observe que essa distribuição d pode ser definida através do **núcleo**

$$l_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\langle d, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) l_{[0,1]}(t) dt = \langle l_{[0,1]}, f \rangle,$$

onde a última igualdade diz respeito ao produto interno usual.

Distribuições definidas a partir de um núcleo, como a do exemplo anterior, são ditas **distribuições regulares**. Sem formalismo, dada uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir a distribuição regular d_h , que tem h como núcleo, ou seja,

$$\langle d_h, f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(t) dt.$$

As operações básicas que conhecemos para funções também podem ser estendidas para distribuições. Sejam d_h e d_g duas distribuições e α um escalar, então

$$\begin{aligned} d &= d_h + d_g & \langle d, f \rangle &= \langle d_h, f \rangle + \langle d_g, f \rangle, \\ d &= \alpha d_h & \langle d, f \rangle &= \alpha \langle d_h, f \rangle, \\ d &= d_{h'} & \langle d, f \rangle &= -\langle d_h, f' \rangle, \\ d &= d_{\hat{h}} & \langle d, f \rangle &= \langle d_h, \hat{f} \rangle. \end{aligned}$$

Enquanto que as primeiras duas operações são simples de entender e aceitar, de onde vêm as duas últimas? Observe que

$$\langle d_{h'}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h'(t) dt = f(t) h(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) h(t) dt = -\langle d, f' \rangle,$$

uma vez que f tem suporte compacto. Além disso,

$$\begin{aligned}\langle d_{\hat{h}}, f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{h}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-ixt} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx dt = \langle d_h, \hat{f} \rangle\end{aligned}$$

A distribuição **Delta de Dirac**, denotada por δ , é definida como

$$\langle \delta, f \rangle = f(0). \quad (2.4)$$

Esta distribuição não é regular, na medida que não existe nenhuma função, tal que seu produto interno por uma função teste resulte sempre no valor da função teste em zero. Distribuições que não são regulares, são ditas **distribuições singulares**.

A Delta de Dirac está definida para toda função contínua, sendo assim aplicável a uma classe maior de funções testes.

Abuso de notação Apesar de não haver um núcleo para a Delta de Dirac, é comum utilizar o abuso de notação

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt,$$

como se de fato δ fosse uma função. Isto simplifica bastante as contas e torna a notação mais leve. Porém, não se esqueça jamais, δ não é uma função e não faz sentido escrever $\delta(t)$ fora do operador de integral.

Propriedades da Delta de Dirac

(a) **Localização** Dado $\epsilon > 0$, então

$$\delta_{\epsilon}(t) : \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t) \delta(t) dt = f(0).$$

(b) **Deslocamento**

$$\delta(t - a) : \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + a) \delta(t) dt = f(a).$$

(c) **Escalamento** ($a \neq 0$)

$$\delta(at) : \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t/a) \delta(t) dt = \frac{f(0)}{|a|}.$$

(d) **Derivada**

$$\delta'(t) : \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0).$$

Isto é uma definição, mas a escolha se justifica por ser consistente com integração por partes, no caso de distribuições regulares.

- (e) **Composição** Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável. Se existe um único zero de h , $T \in \mathbb{R}$, tal que $h(T) = 0$ e $h'(T) \neq 0$, então

$$\delta(h(t)) : \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(h(t))dt = \frac{f(T)}{|h'(T)|}.$$

(f) **Transformada de Fourier**

$$\hat{\delta} : \hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1.$$

Por outro lado,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega,$$

uma vez que a Delta de Dirac é par.

2.3 Funções de Heaviside e sinal

Definição 2.3 A função $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

é denominada **função de Heaviside** ou **função degrau unitário**.

Definição 2.4 A função $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geq 0, \end{cases}$$

é denominada **função rampa unitária**.

Observe que

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \mu(\tau) d\tau.$$

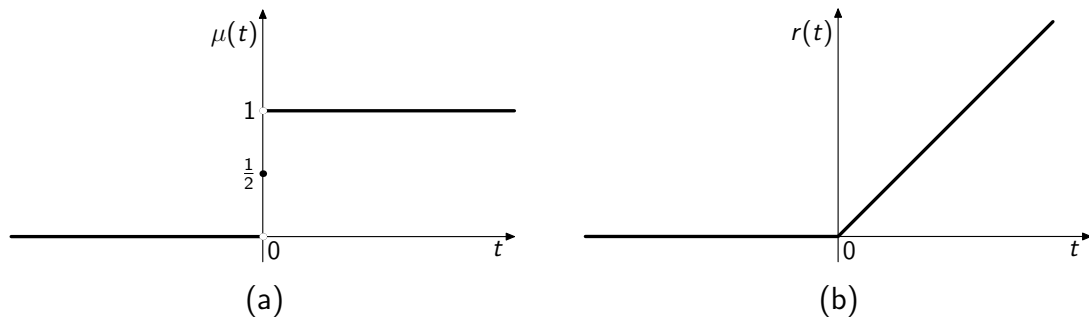


Figura 2.1: (a) Gráfico da função de Heaviside. (b) Gráfico da função rampa.

Definição 2.5 A função $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$s(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

é denominada **função sinal**.

Repare que

$$s(t) = 2\mu(t) - 1.$$

Todas as três funções apresentadas nesta seção não são diferenciáveis em $t = 0$. Porém, podemos nos perguntar quais seriam as derivadas dessas funções, *quando interpretadas como distribuições*.

Exemplo 2.5 Suponha que a função sinal defina a distribuição d_s dada por

$$\langle d_s, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)f(t) dt.$$

Sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \langle d'_s, f \rangle &\equiv -\langle d_s, f' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)f'(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f'(t) dt - \int_0^{\infty} f'(t) dt = 2f(0) = 2\langle \delta, f \rangle, \end{aligned}$$

uma vez que f , sendo uma função teste, tem suporte compacto. Logo, no sentido de distribuições,

$$s'(t) = 2\delta(t).$$

Como $\mu(t) = (s(t) + 1)/2$, temos $\mu'(t) = \delta(t)$. Como exercício, você deve provar que $r' = \mu$, também no sentido de distribuições. Esquematicamente, temos

$$r \xrightarrow{D} \mu \xrightarrow{D} \delta$$

Exemplo 2.6 O que se pode dizer sobre a transformada de Fourier dessas funções? Considere a função sinal, que não é nem uma função $\mathcal{L}^1$, nem uma função $\mathcal{L}^2$. Porém, no sentido de distribuições, temos

$$\mathcal{F}[(s(t) + C)'] = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2.$$

Por outro lado, usando que $\mathcal{F}[u'] = (i\omega)\hat{u}$, temos

$$\mathcal{F}[(s(t) + C)'](\omega) = i\omega[\hat{s}(\omega) + 2\pi C\delta(\omega)].$$

Logo,

$$i\omega[\hat{s}(\omega) + 2\pi C\delta(\omega)] = 2,$$

e portanto

$$\hat{s}(\omega) = \frac{2}{i\omega} + C\delta(\omega).$$

Porém, como s é uma função ímpar, sua transformada também é ímpar, implicando que $C = 0$. Concluimos então que

$$\hat{s}(\omega) = \frac{2}{i\omega}.$$

Exemplo 2.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = e^{iat}$, com $a \in \mathbb{R}$. Sua transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-\omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - a).$$

Exemplo 2.8 Quais as transformadas de Fourier das funções seno e cosseno?

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(at)] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right] = \frac{\mathcal{F}[e^{iat}] - \mathcal{F}[e^{-iat}]}{2i} \\ &= \frac{2\pi\delta(\omega - a) - 2\pi\delta(\omega + a)}{2i} = i\pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(at)] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right] = \frac{\mathcal{F}[e^{iat}] + \mathcal{F}[e^{-iat}]}{2} \\ &= \frac{2\pi\delta(\omega - a) + 2\pi\delta(\omega + a)}{2} = \pi[\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]. \end{aligned}$$

Exercício 2.5 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par. Prove que $\hat{f}$ é uma função real e par. 

Exercício 2.6 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar. Prove que $\hat{f}$ é uma função puramente imaginária e ímpar. 

Exercício 2.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e defina seus momentos $a_m = \int_{-\infty}^{\infty} t^m f(t) dt$, para $m = 0, 1, \dots$. Prove que se para todo $m = 0, 1, \dots$, $|a_m| < \infty$ então $\hat{f}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} (-i\omega)^m$.



Exercício 2.8 Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)^2 dt = 1$.



2.4 Exercícios propostos

Exercício 2.9 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com transformada de Fourier $\hat{f}$. Mostre que $\mathcal{F}[\hat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega)$.

Exercício 2.10 Sejam $a < b$. Determine $\int_a^b \delta(t) dt$. Analise o caso em que $a = 0$ ou $b = 0$.

Exercício 2.11 Prove que $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.

Exercício 2.12 Prove que, no sentido de distribuições, $r'(t) = \mu(t)$.

Exercício 2.13 Mostre que, no sentido de distribuições, $\hat{\mu}(\omega) = 1/(i\omega) + \pi\delta(\omega)$.

Exercício 2.14 Sejam f e g funções que tenham transformada de Fourier e $a \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes propriedades da transformada de Fourier:

(a) **Linearidade:** Se $h(t) = f(t) + ag(t)$, então $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) + a\hat{g}(\omega)$.

(b) **Simetria:** $h(t) = \hat{g}(t)$, então $\hat{h}(\omega) = 2\pi g(-\omega)$.

(c) **Escalação:** Se $h(t) = f(at)$, $a \neq 0$, então $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\omega/a)$.

(d) **Deslocamento:** Se $h(t) = f(t - a)$, então $\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)$.

Exercício 2.15 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que tenha transformada de Fourier. Compute a transformada de Fourier de $t^n f(t)$, para $n = 0, 1, 2, \dots$.

Exercício 2.16 Compute a transformada de Fourier da função seno cardinal.

Exercício 2.17 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que:

(a) Se f é ímpar, então $\hat{f}$ tem parte real nula e é ímpar.

(b) $\text{Re}[\hat{f}]$ é par e $\text{Im}[\hat{f}]$ é ímpar.

(c) Para todo $\omega \in \mathbb{R}$. $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

(d) (Teorema de Plancherel) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$.

Exercício 2.18 Sejam $a, b \neq 0$. Analise, nos domínios do tempo e da frequência, algébrica e graficamente, os sinais $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidos por:

(a) $s(t) = (1 - 2a^2 t^2) \exp(-a^2 t^2)$. (**Pulso de Ricker**)

(b) $s(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + t^2}$. (**Pulso de Rayleigh**)

(c) $s(t) = \exp(-a^2 t^2) \cos(bt)$. (**Pulso de Gabor**)

Capítulo 3

Convolução

Definição 3.1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A **convolução** entre f e g é a função $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Exercício 3.1 Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Verifique que a convolução é

(a) uma operação linear: $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$,

(b) uma operação comutativa: $(f * g) = (g * f)$,

(c) uma operação associativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$. 

Apesar de não ser correto, é comum aceitar alguma liberdade na notação e escrever $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$. (Por que esta notação não é possível?)

Exemplo 3.1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então:

(a) $(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t)$.

A distribuição Delta de Dirac é o elemento neutro da operação de convolução.

(b) $(f * \mu)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mu(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = F(t)$.

A convolução com a função Degrau Unitário integra f , de maneira que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0.$$

(c) $(\mu * \mu)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} = r(t)$.

(d) $\delta(t - a) * \delta(t - b) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - a)\delta(t - \tau - b) d\tau = \delta(t - a - b)$.

Aqui cometemos vários abusos de notação!

Exemplo 3.2 Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h = f * g$. Então

$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} \hat{g}(\omega) d\tau \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

A transformada de Fourier do produto de convolução é o produto das transformadas de Fourier.

Exemplo 3.3 Já sabemos que $\widehat{\text{sinc}}(\omega) = \mu(\pi - |\omega|)$. Calcule $(\text{sinc} * \text{sinc})(t)$.

$$\begin{aligned}(\text{sinc} * \text{sinc})(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\widehat{\text{sinc}}(\omega) \cdot \widehat{\text{sinc}}(\omega) \right] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [\mu(\pi - |\omega|) \cdot \mu(\pi - |\omega|)] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [\mu(\pi - |\omega|)] = \text{sinc}(t).\end{aligned}$$

Exercício 3.2 Compute $f * f$, para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \mu(1 - |t|)$. 

Exercício 3.3 Sejam $a > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{-at} \mu(t)$. Prove que se $g_n = f * f * \dots * f$ (n convoluções, $n \geq 0$) então $g_n(t) = t^n f(t) / n!$. 

Sejam que $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha $h = f * g$ e que g e h sejam conhecidas. Como determinar f ? Observe que

$$\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

Suponha que $\hat{g}(\omega) \neq 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Então $\hat{f}(\omega) = \hat{h}(\omega) / \hat{g}(\omega)$ e, portanto,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}(\omega) / \hat{g}(\omega)].$$

Este processo é conhecido como *deconvolução*.

3.1 Exercícios propostos

Exercício 3.4 Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $h(t) = f(t) \cdot g(t)$, mostre que $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$.

Exercício 3.5 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Mostre que

$$(f * g)'(t) = (f' * g)(t) = (f * g')(t).$$

Exercício 3.6 Determine:

- (a) $e^{-\pi t^2} * e^{-\pi t^2}$. (b) $[\mu(t)(1-t)] * [\mu(t)e^t]$. (c) $\mathcal{F}[\text{sinc}(t)^2]$.

Exercício 3.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e defina $f^{[0]} = \delta$ e $f^{[m]} = f * f^{[m-1]}$ para $m = 1, 2, \dots$

- (a) Escreva $\widehat{f^{[m]}}$ em termos de $\hat{f}$.
- (b) Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} f^{[m]}(t) dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right]^m$.
- (c) Como você poderia definir $f^{[p]}$ para p real e positivo?
- (d) Tente interpretar $f^{[1/2]}$.

Exercício 3.8 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Encontre a transformada de Fourier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^n e^{-at} \mu(t)$.

Capítulo 4

Teorema de Shannon

4.1 Função de banda limitada

Definição 4.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de **banda limitada** se existe $\Omega > 0$ tal que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$.

Se $\omega_c > \Omega$, então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.1)$$

A série de Fourier para a função $e^{i\omega t}$, na variável ω , no intervalo $[-\omega_c, \omega_c]$ é dada por

$$e^{i\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \omega / (2\omega_c)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n \omega / \omega_c},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega t} e^{-2\pi i n \omega / (2\omega_c)} d\omega = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t - \pi n / \omega_c)} d\omega.$$

Seja $\tau \equiv t - \pi n / \omega_c$. Se $\tau = 0$, então $c_n = 1$; caso contrário

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \left. \frac{e^{i\omega\tau}}{i\tau} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\text{sen}(\omega_c \tau)}{\omega_c \tau}.$$

Logo,

$$c_n = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ \frac{\text{sen}(\omega_c \tau)}{\omega_c \tau}, & \tau \neq 0, \end{cases} = \text{sinc}(\omega_c \tau / \pi) = \text{sinc}(\omega_c t / \pi - n) = \text{sinc}\left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right),$$

onde $\Delta t = \pi/\omega_c$. Substituindo a série de Fourier para $e^{i\omega t}$ em (4.1), temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) e^{i\omega n\Delta t} \right] d\omega \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n\Delta t} d\omega \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n\Delta t} d\omega \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) f(n\Delta t). \end{aligned}$$

Isto significa que para uma função de banda limitada basta conhecer uma amostra infinita enumerável, $f(n\Delta t)$, $n \in \mathbb{Z}$, e $\omega_c = \pi/\Delta t > \Omega$, para que seja possível conhecer $f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

4.2 Teorema da Amostragem de Shannon

Se f é função de banda limitada e g é uma translação de f , ou seja, para $t_0 \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(t) = f(t + t_0)$, então g também é função de banda limitada, uma vez que $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$. Logo, para $\Delta t < \pi/\Omega$,

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) g(n\Delta t),$$

e por consequência,

$$f(t) = g(t - t_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc} \left(\frac{t - t_0 - n\Delta t}{\Delta t} \right) f(t_0 + n\Delta t).$$

Denotando por $\omega_q = \pi/\Delta t$, denominada *frequência de Nyquist*, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (da amostragem de Shannon) *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega > 0$ tais que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$. Seja $t_n = t_0 + n\Delta t$, para $t_0 \in \mathbb{R}$. Se $\omega_q > \Omega$ ou, equivalentemente, $\Delta t < \pi/\Omega$, então para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \text{sinc} \left(\frac{t - t_n}{\Delta t} \right).$$

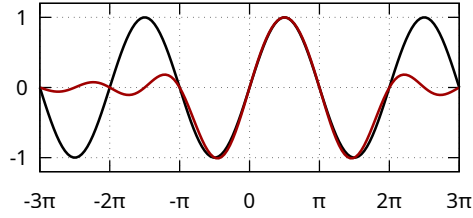
Exemplo 4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \text{sen}(t)$. Vimos no Exemplo 2.8 que $\hat{f}(\omega) = i\pi[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$ e portanto $\hat{f}(\omega) = 0$, se $|\omega| > 1$. Logo, f é de banda limitada e podemos tomar $\Omega = 1$. Pelo Teorema de Shannon, se $0 < \Delta t < \pi/\Omega = \pi$, então, para todo $t_0, t \in \mathbb{R}$ temos*

$$\text{sen}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sen}(t_0 + n\Delta t) \text{sinc} \left(\frac{t - t_0 - n\Delta t}{\Delta t} \right).$$

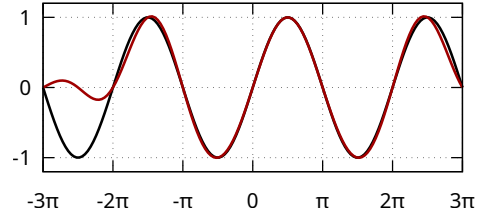
Escolhendo $t_0 = 0$ e $\Delta t = \pi/2$, ficamos com

$$\sin(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin(n\pi/2) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n\pi/2}{\pi/2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{sinc}(2t/\pi - 2n - 1).$$

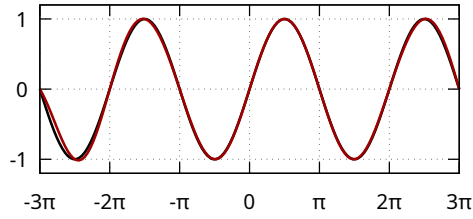
A figura a seguir exibe a função seno e as somas parciais tomando $-N \leq n \leq N$, nos casos de $N = 1, 2, 3, 4$.



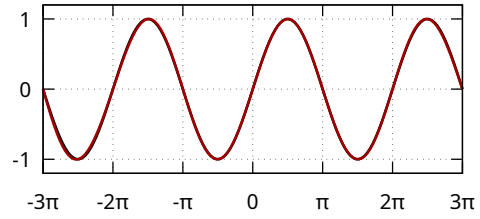
(a) $N = 1$.



(b) $N = 2$.



(c) $N = 3$.



(d) $N = 4$.

Figura 4.1: Em todos os gráficos, a curva preta é o gráfico da função seno e a curva vermelha é o gráfico da soma parcial da série acima para $-N \leq n \leq N$.

O que aconteceria se $\Delta t = \pi$, violando o limite do Teorema de Shannon?

Exemplo 4.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = e^{-t^2}$. Vimos no Exemplo 2.1 que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$. Logo, f não é de banda limitada. Porém, como seu espectro decai rapidamente, é razoável se perguntar se f pode ser bem aproximada por uma função de banda limitada.

Como $\hat{f}(\omega) \approx 0$ para $|\omega| > 4$, tome $\Delta t = 1/2 < \pi/4$. Assim,

$$e^{-t^2} \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/2) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n/2}{1/2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2/4} \operatorname{sinc}(2t - n).$$

Na figura a seguir, estão exibidas as aproximações considerando as somas parciais para $N \leq n \leq N$, com $N = 1, 3, 5$.

Exercício 4.1 Seja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função de banda limitada com banda menor que Ω . Prove que se $0 < \Delta t < \pi/\Omega$ então:

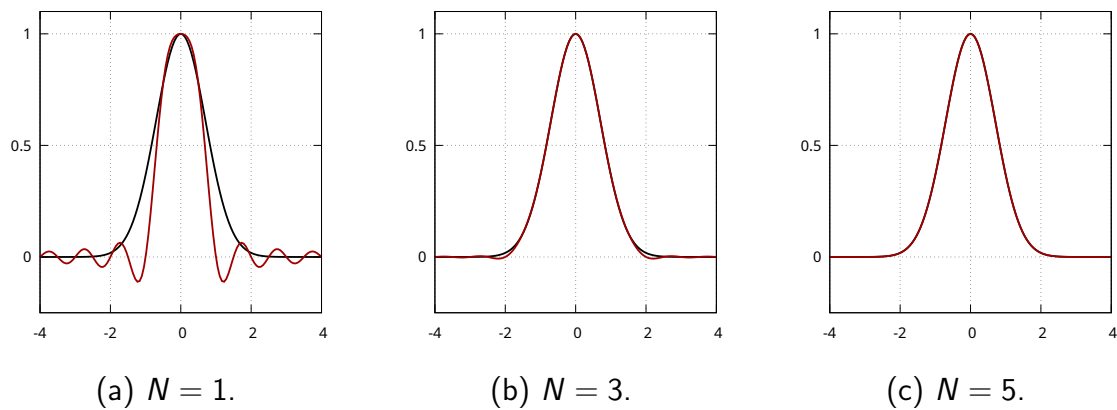


Figura 4.2: Em todos os gráficos, a curva preta é o gráfico da função seno e a curva vermelha é o gráfico da soma parcial da série acima para $-N \leq n \leq N$.

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t)^2.$$

$$(b) \text{ Para todo } |\omega| \leq \Omega, \hat{s}(\omega) = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t}.$$



Exercício 4.2 Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que x e y sejam de banda limitada com banda menores que Ω_x e Ω_y , respectivamente. Determine o intervalo máximo de amostragem para garantir a reconstrução exata das funções abaixo, a partir das amostras, nos seguintes casos:

$$(a) h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = x(t + a).$$

$$(b) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = x(t) + y(t).$$



Exercício 4.3 Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\omega_1 < \omega_2$ tais que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$. Defina $\lambda = (\omega_1 + \omega_2)/2$ e $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Mostre que

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \exp(i\lambda(t - t_k)) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - t_k}{\Delta t}\right).$$



4.3 Exercícios propostos

Exercício 4.4 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \cos(at + b)$, $\Delta t > 0$ e $t_n = n\Delta t$, para $n \in \mathbb{Z}$. Prove que existe $c \in [-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$ tal que $f(t_n) = \cos(ct_n + b)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Qual a relação deste resultado com o Teorema de Shannon?

Exercício 4.5 Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que x e y sejam de banda limitada com banda menores que Ω_x e Ω_y , respectivamente. Determine o intervalo máximo de amostragem para os sinais:

(a) $x(at)$, $a \neq 0$.

(c) $[\mu * x](t)$.

(e) $x(t)y(t)$

(b) $x'(t)$.

(d) $x(t) \cos(at)$

(f) $[x * y](t)$

Exercício 4.6 Sejam $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(t)$, para $|t| \leq \pi$ e $g(t) = 0$, para $|t| > \pi$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a extensão periódica de f . Sejam c_n , $n \in \mathbb{Z}$, os coeficientes da série de Fourier de f no intervalo $[-\pi, \pi]$. Prove que

$$\hat{g}(\omega) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \text{sinc}(\omega - n) \quad \text{e} \quad \hat{h}(\omega) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n).$$

Compare estes resultados e os interprete à luz do Teorema de Shannon.

Capítulo 5

Transformada de Fourier Discreta

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função que admita transformada de Fourier, porém conhecida apenas em uma quantidade finita de pontos regularmente espaçados, $f_j = f(t_j)$, onde $t_j = t_0 + j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Queremos estudar como a transformada de Fourier pode ser aproximada, nesta situação. Veja que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-i\omega t_j}.$$

Isto equivale a aproximar a integral pela regra do retângulo. A aproximação acima pode ser utilizada para estimar $\hat{f}(\omega)$ para qualquer valor de ω . Por uma questão de simetria, vamos considerar que a transformada inversa também deva ser aproximada por uma soma discreta, ou seja, $\hat{f}(\omega)$ também deve estar disponível apenas para uma quantidade finita de valores discretos, regularmente espaçados.

Inicialmente, vamos assumir $t_0 = 0$. Com valores para f amostrados em a cada Δt , a frequência máxima representável (frequência de Nyquist) é $\omega_q = \pi/\Delta t$. Portanto, as amostras de $\hat{f}$ serão tomadas no intervalo $[-\omega_q, \omega_q]$. Sendo assim, a razão de amostragem deve ser $\Delta\omega = 2\omega_q/N = 2\pi/(N\Delta t)$ e o valores discretos para ω são $\omega_k = -\omega_q + k\Delta\omega$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Apesar de razoável, a prática é trabalhar apenas com as frequências positivas $\omega_k = k\Delta\omega$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Observe que neste caso, se $k \geq N/2$, então $\omega_k \geq \omega_q$. Com isto,

$$\hat{f}(\omega_k) \approx \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\omega_k t_j} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ijk/N}. \quad (5.1)$$

Com essa escolha de frequências,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_k - 2\omega_q) &= \hat{f}(k\Delta\omega - N\Delta\omega) = \hat{f}((k-N)\Delta\omega) \\ &\approx \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ijk(k-N)/N} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ijk} \approx \hat{f}(\omega_k). \end{aligned}$$

Assim, as frequências para $k \geq N/2$ devem ser interpretadas como as frequências negativas, ou seja $\omega_k \equiv \omega_k - 2\omega_q$ (veja Figura 5.1). No caso em que N é par, as frequências

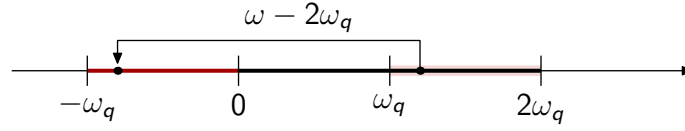


Figura 5.1: Diagrama de frequências na transformada de Fourier discreta.

positivas amostradas são

$$0, \Delta\omega, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \Delta\omega, \overbrace{\left(\frac{N}{2}\right) \Delta\omega, \dots, (N-1) \Delta\omega}^{\omega_k \geq \omega_q},$$

que são congruentes a

$$-\omega_q = -\overbrace{\left(\frac{N}{2}\right) \Delta\omega, \dots, -\Delta\omega}^{\omega_k - 2\omega_q}, 0, \Delta\omega, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \Delta\omega = \omega_q - \Delta\omega.$$

Já no caso em que N é ímpar, as frequências positivas amostradas são

$$0, \Delta\omega, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \Delta\omega, \overbrace{\left(\frac{N+1}{2}\right) \Delta\omega, \dots, (N-1) \Delta\omega}^{\omega_k \geq \omega_q},$$

que são congruentes a

$$-\omega_q < -\overbrace{\left(\frac{N-1}{2}\right) \Delta\omega, \dots, -\Delta\omega}^{\omega_k - 2\omega_q}, 0, \Delta\omega, \dots, \left(\frac{N-1}{2}\right) \Delta\omega < \omega_q - \Delta\omega.$$

Independentemente da paridade de N , as frequências positivas amostradas são congruentes a

$$-\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil \Delta\omega, \dots, -\Delta\omega, 0, \Delta\omega, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \Delta\omega,$$

onde $\lceil x \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a x e $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x .

Definido $W_N = e^{2\pi i/N}$, a aproximação em (5.1) fica escrita como

$$\hat{f}(\omega_k) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{-jk} = \Delta t \check{f}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Definição 5.1 Seja $F = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^N$. O vetor $\check{F} = [\check{f}_0, \check{f}_1, \dots, \check{f}_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^N$ definido por

$$\check{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{-jk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.2)$$

onde $W_N = e^{2\pi i/N}$, é dito a **Transformada de Fourier Discreta** ou **DFT** de F .

A equação (5.2) pode ser escrita matricialmente. Definindo a matriz

$$\mathbb{M}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

a equação (5.2) fica

$$\check{F} = \overline{\mathbb{M}}_N F.$$

Exercício 5.1 Mostre que a matriz $\mathbb{M}$ tem inversa, dada por $\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbb{M}}_N$. 

Assim,

$$F = (\overline{\mathbb{M}}_n)^{-1} \check{F} = \overline{\mathbb{M}}_N^{-1} \check{F} = \frac{1}{N} \mathbb{M}_N \check{F},$$

ou, de forma explícita,

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \check{f}_k W_N^{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Caso $t_0 \neq 0$, basta considerar a análise feita para $g(t) = f(t_0 + t)$, ou seja $f_j = f(t_0 + j\Delta t)$ e $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$ e, portanto, $\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \hat{g}(\omega) \approx e^{-i\omega t_0} \Delta t \check{f}$. A Figura 5.2 exibe essas relações de maneira esquemática.

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\overline{\mathbb{M}}_N} & \begin{bmatrix} \check{f}_0 \\ \check{f}_1 \\ \vdots \\ \check{f}_{N-1} \end{bmatrix} & \xrightarrow{\approx e^{-i\omega_k t_0} \Delta t} & \begin{bmatrix} \hat{f}(\omega_0) \\ \hat{f}(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{f}(\omega_{N-1}) \end{bmatrix} \\ & \xleftarrow{\frac{1}{N} \mathbb{M}_N} & & \xleftarrow{\approx e^{i\omega_k t_0} / \Delta t} & \end{array}$$

Figura 5.2: Relações entre F , $\check{F}$ e amostras de $\hat{f}(\omega)$.

Exemplo 5.1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \cos(t)$. Sabemos que $\hat{f}(\omega) = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$. Escolhendo $N = 4$ e tomando amostras a partir de $t_0 = 0$ a cada $\Delta t = \pi/2$, temos que

$$F = [f(0), f(\pi/2), f(\pi), f(3\pi/2)]^T = [1, 0, -1, 0]^T.$$

Para esta razão de amostragem, a frequência de Nyquist é $\omega_q = \pi/\Delta t = 2$ e a razão de amostragem na frequência é $\Delta\omega = 2\omega_q/N = 1$. As frequências amostradas são $\omega_0 = 0$,

$w_1 = 1$, $w_2 = 2 \equiv 2 - 2\omega_q = -2$ e $w_3 = 3 \equiv 3 - 2\omega_q = -1$. Logo,

$$\begin{aligned}\hat{F} &= [\hat{f}(-2), \hat{f}(-1), \hat{f}(0), \hat{f}(1)]^T \\ &= \pi[\delta(-3) + \delta(-1), \delta(-2) + \delta(0), \delta(-1) + \delta(1), \delta(0) + \delta(2)]^T \\ &= \pi[0, \delta(0), 0, \delta(0)]^T \approx \pi[0, 1/\Delta\omega, 0, 1/\Delta\omega]^T = [0, \pi, 0, \pi]^T.\end{aligned}$$

Para comparar este resultado com a DFT é preciso rearranjar os termos do vetor, passando sua metade posterior para o início. Entretanto, devido à simetria observada, neste caso, não há alterações. Para o cálculo da DFT, temos $W_4 = e^{2\pi i/4} = i$ e, assim,

$$\check{F} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Computando o produto por $\Delta t = \pi/2$, uma vez que $t_0 = 0$, podemos ver que $\Delta t \check{F} = \hat{F}$.

Exercício 5.2 Compute a DFT do sinal discreto $f_j = j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. 

Exercício 5.3 Compute e analise a DFT da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = e^{-t^2}$, discretizada em $t_j = j - 2$, para $j = 0, 1, 2, 3$. 

5.1 Aliasing na DFT

Aliasing é o fenômeno em que informação de alta frequência é percebida erroneamente como, ou mesclada com, informação de baixa frequência.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica com período T , amostrada em N pontos equidistantes $\{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\} \subset [0, T)$, ou seja, $\Delta t = T/N$ e $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Sendo $f_k = f(t_k)$, de (5.2) temos

$$\check{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{-jk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Por outro lado, por f ser periódica, sua representação em série de Fourier é

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t / T}.$$

Tomando $t = t_k$ na fórmula anterior, temos

$$f_k = f(t_k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t_k / T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n k / N}.$$

Substituindo isto na expressão para $\check{f}_k$, obtemos

$$\begin{aligned}\check{f}_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n j / N} \right] W_N^{-jk} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i n j / N} W_N^{-jk} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i n j / N} e^{-2\pi i j k / N} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j (n-k) / N} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(n-k)} \right].\end{aligned}$$

Quando $n = k + mN$ com $m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(n-k)} = \sum_{j=0}^{N-1} (W_N^N)^{mj} = N,$$

uma vez que $W_N^N = 1$. No caso em que $(n - k) = p$ não é um múltiplo inteiro de N ,

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(n-k)} = \sum_{j=0}^{N-1} W_N^{jp} = \frac{1 - (W_N^N)^p}{1 - W_N^p} = 0.$$

Logo,

$$\check{f}_k = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{k+mN}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Isto mostra que o coeficiente k da DFT de f é a soma das contribuições das frequências de f em $k + mN$, $m \in \mathbb{Z}$.

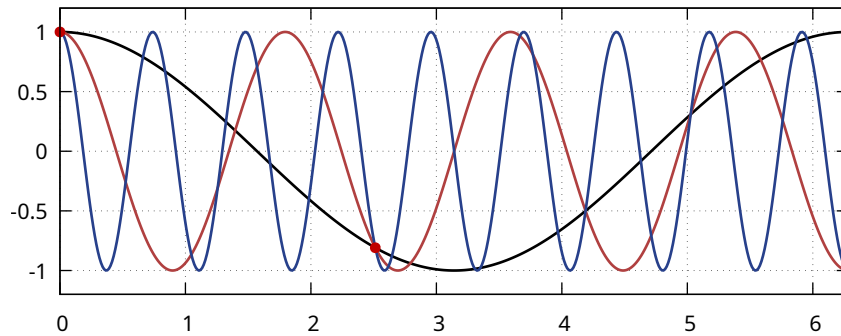


Figura 5.3: Sinais periódicos em várias frequências, que quando amostrados são indistinguíveis.

A Figura 5.3 mostra uma situação onde apenas dois pontos foram amostrados. Note que para o sinal em preto, de mais baixa frequência, os pontos de amostragem estão em $[0, T/2)$, onde T é o período deste sinal. Os sinais em vermelho e em azul, de mais alta frequência, teriam as mesmas amostras, sendo percebidos em aliasing. Repare que, neste caso, nenhum sinal de frequência menor teria as mesmas duas amostras (por

quê?). Desta observação, surge a regra de que para ser capaz de amostrar sinal com uma determinada frequência sem mesclá-lo com componentes de frequência menor, é necessário ter ao menos dois pontos amostrados no intervalo $[0, T/2)$, onde T é o período do sinal.

Exemplo 5.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 2 \cos(t) - 0.7 \cos(4t)$. Observe que o período da primeira parcela de f é $T_1 = 2\pi$ e da segunda parcela de f é $T_2 = \pi/2$, portanto a função f é periódica com período 2π . Para que a função seja amostrada com propriedade é necessários que $\Delta t < \frac{1}{2} \min\{T_1, T_2\} = \pi/4 \approx 0.79$.

De início, considere $\Delta t = 0.7 < \pi/4$. Ao computar a DFT, utilizando amostras regularmente espaçadas por Δt , as duas frequências que compõem o sinal são corretamente identificadas (Figura 5.4). Neste caso, o sinal é reconstruído perfeitamente a partir de sua DFT (Figura 5.5).

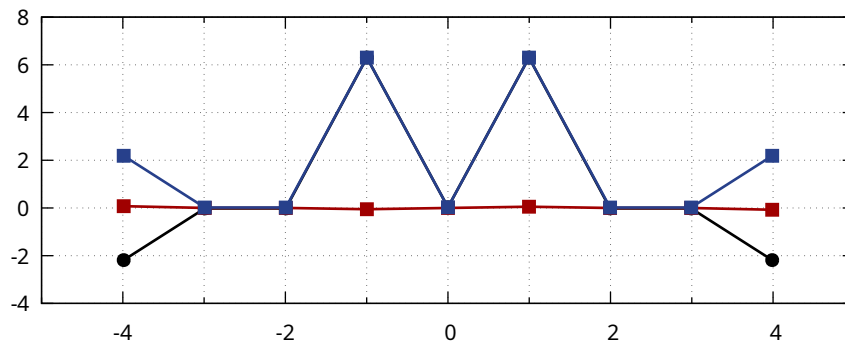


Figura 5.4: DFT do sinal amostrado com $\Delta t = 0.7$. Em preto, vermelho e azul estão a parte real, imaginária e o valor absoluto da DFT, respectivamente.

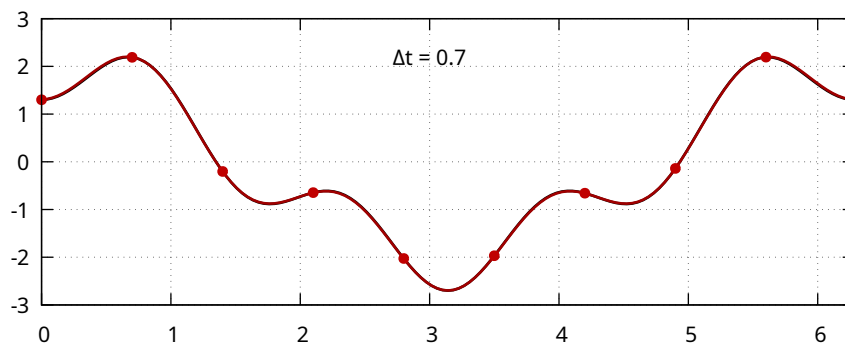


Figura 5.5: Em vermelho, o sinal reconstruído a partir de sua DFT, sobreposto ao sinal original, em preto (praticamente indistintos).

Considere agora a razão de amostragem $\Delta t = 1 > \pi/4$. Ao computar a DFT utilizando amostras da função tomadas a esta razão de amostragem a frequência mais

baixa, $\omega_1 = 1$, é corretamente identificada, mas a frequência mais alta, $\omega_2 = 4$ aparece em alias (Figura 5.6) e o sinal reconstruído a partir da DFT não está correto (Figura 5.7). De fato, com este valor de Δt , no intervalo de $[0, 4\pi]$ foram tomadas $N = 13$ amostras. Assim, $\omega_q = \pi/\Delta t = \pi$ e $\Delta\omega = 2\omega_q/N \approx 0.48$. A frequência 4 foi mapeada em alias para $4 - 2\omega_q \approx -2.2832$, e por simetria também em 2.2832 (na Figura 5.6 vemos valores expressivos nos pontos amostrados mais próximos desse valor).

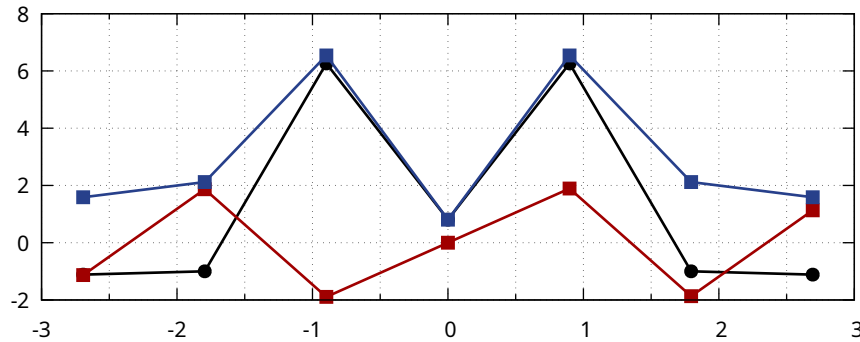


Figura 5.6: DFT do sinal amostrado com $\Delta t = 1.0$. Em preto, vermelho e azul estão a parte real, imaginária e o valor absoluto da DFT, respectivamente.

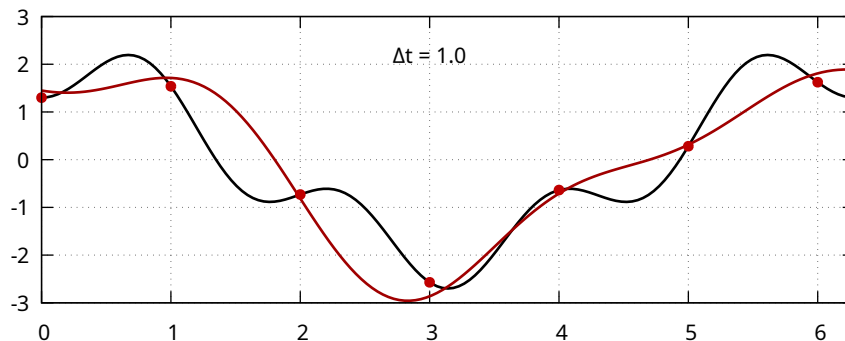


Figura 5.7: Em vermelho, o sinal reconstruído a partir de sua DFT, sobreposto ao sinal original, em preto.

Exemplo 5.3 Humanos conseguem ouvir sons no intervalo de 20Hz a 20kHz. Quando sons passaram a ser gravados digitalmente tornou-se necessário escolher a razão de amostragem que permitisse reconstruir o sinal analógico com fidelidade até a frequência máxima audível. Como vimos, para haver ao menos duas amostras por período é necessário utilizar razão de amostragem superior 40kHz. Em CD's, a razão de amostragem é 44100Hz. Na gravação de áudio de alta fidelidade, e em equipamentos como DVD's e Blu-rays, a razão de amostragem utilizada é 48000Hz.

5.2 Transformada de Fourier Rápida

O custo computacional da DFT é, em princípio, o custo da multiplicação de uma matriz quadrada de ordem N por um vetor, ou seja, $O(N^2)$. Veremos que, explorando algumas simetrias, é possível reduzir este custo para $O(N \log_2 N)$.

Suponha que N seja para, digamos $N = 2L$. Então, para $k = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned}\check{f}_k &= \sum_{j=0}^N f_j W_N^{-jk} = \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j} W_N^{-2jk} + \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j+1} W_N^{-(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j} (e^{2\pi i/N})^{-2jk} + \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j+1} (e^{2\pi i/N})^{-(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j} (e^{2\pi i/L})^{-jk} + e^{-2k\pi i/N} \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j+1} (e^{2\pi i/L})^{-jk} \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j} W_L^{-jk} + W_N^{-k} \sum_{j=0}^{L-1} f_{2j+1} W_L^{-jk}.\end{aligned}$$

Podemos separar as amostras do vetor F em dois vetores de dimensão $L = N/2$, como

$$F^e = [f_0^e, f_1^e, \dots, f_{L-1}^e]^T = [f_0, f_2, \dots, f_{N-2}]^T$$

e

$$F^o = [f_0^o, f_1^o, \dots, f_{L-1}^o]^T = [f_1, f_3, \dots, f_{N-1}]^T.$$

Para estes vetores, a DFT de dimensão L fica

$$\check{f}_k^e = \sum_{j=0}^{L-1} f_j^e W_L^{-jk} \quad \text{e} \quad \check{f}_k^o = \sum_{j=0}^{L-1} f_j^o W_L^{-jk}, \quad k = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Logo, para $k = 0, 1, \dots, L - 1$,

$$\check{f}_k = \sum_{j=0}^{L-1} f_j^e W_L^{-jk} + W_N^{-k} \sum_{j=0}^{L-1} f_j^o W_L^{-jk} = \check{f}_k^e + W_N^{-k} \check{f}_k^o.$$

Para $k = L, L + 1, \dots, N - 1$, se $k = \kappa + L$,

$$\begin{aligned}\check{f}_k &= \check{f}_{\kappa+L} = \sum_{j=0}^{L-1} f_j^e W_L^{-j(\kappa+L)} + W_N^{-(\kappa+L)} \sum_{j=0}^{L-1} f_j^o W_L^{-j(\kappa+L)} \\ &= W_L^{-jL} \sum_{j=0}^{L-1} f_j^e W_L^{-j\kappa} + W_N^{-\kappa} W_N^{-L} W_L^{-jL} \sum_{j=0}^{L-1} f_j^o W_L^{-j\kappa}.\end{aligned}$$

Porém, $W_L^L = e^{2\pi i L/L} = 1$ e $W_N^L = e^{2\pi i L/(2L)} = -1$. Assim, para $k = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\check{f}_{k+L} = \check{f}_k^e - W_N^{-k} \check{f}_k^o.$$

Em resumo, a DFT de F , com dimensão $N = 2L$, se escreve em termos de duas DFT's, de dimensão L , para $k = 0, 1, \dots, L - 1$, como

$$\check{f}_k = \check{f}_k^e + W_N^{-k} \check{f}_k^o \quad \text{e} \quad \check{f}_{k+L} = \check{f}_k^e - W_N^{-k} \check{f}_k^o. \quad (5.3)$$

O número de operações no cálculo direto de uma DFT de dimensão N é $c(N) \equiv 2N^2 - N$ somas e produtos. Se, de outra forma, computamos duas DFT's de dimensão $N/2$ e as utilizamos, como em (5.3), precisamos de $2c(N/2) + N$. Se $N/2$ também for par, ao invés de computar cada DFT de dimensão $N/2$ podemos trocar por duas de DFT de dimensão $N/4$, com custo total $2[2c(N/4) + N/2] + N = 4c(N/4) + 2N$. Se, de fato, $N = 2^p$, podemos repetir esse processo até que o custo total seja $2^p c(1) + pN = N + pN \approx N \log_2 N$. Este algoritmo é denominado *Transformada de Fourier Rápida* ou *FFT*. Existem algoritmos similares baseados na decomposição em fatores primos de N . Na Figura 5.8 ilustramos como o algoritmo FFT divide iterativamente o vetor F em vetores de tamanho menor.

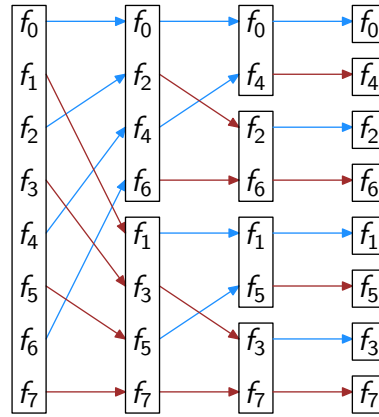


Figura 5.8: Esquema de divisão do vetor F em subvetores no algoritmo FFT.

Para se ter uma ideia da diferença no número de operações para o cálculo da DFT de forma direta e através da FFT, se $N = 2^5 = 32$, $c(N) \approx 2048$, enquanto que $N \log_2 N = 160$. Para $N = 2^{20} \approx 10^6$, $c(N) \approx 2 \cdot 10^{12}$ enquanto que $N \log_2 N \approx 2 \cdot 10^7$, ou seja a DFT demanda 100 mil vezes mais operações aritméticas que a FFT.

5.3 Convolução discreta

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere as amostras $f_j = f(t_j)$, com $t_j = t_0 + j\Delta t$, $j \in \mathbb{Z}$ e $g_\ell = g(\tau_\ell)$, com $\tau_\ell = \ell\Delta t$ e $\ell \in \mathbb{Z}$. Seja $h = f * g$. Veja que

$$\begin{aligned} h(t_k) &= (f * g)(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t_k - \tau) d\tau \\ &\approx \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t_j)g(t_k - t_j) = \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t_j)g((k - j)\Delta t) \\ &= \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t_j)g(\tau_{k-j}) = \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j g_{k-j} = \Delta t \sum_{j+l=k} f_j g_l. \end{aligned}$$

No caso de amostras finitas, digamos $F = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]$ e $G = [g_0, g_1, \dots, g_{M-1}]$, o vetor $H^d = F * G = [h_0^d, h_1^d, \dots, h_{M+N-2}^d]$, definido por

$$h_k^d = \sum_{j+\ell=k} f_j g_\ell, \quad k = 0, 1, \dots, M + N - 2.$$

Dessa maneira, temos

$$h(t_k) \approx \Delta t h_k^d, \quad k = 0, 1, \dots, M + N - 2.$$

Exemplo 5.4 Tome os sinais discretos, $F = [1, 2, 3, 4]$ e $G = [5, 6, 7, 8, 9]$. Se $H^d = F * G$, então

$$h_0^d = \sum_{j+\ell=0} f_j g_\ell = f_0 g_0 = 1 \cdot 5 = 5,$$

$$h_1^d = \sum_{j+\ell=1} f_j g_\ell = f_0 g_1 + f_1 g_0 = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 16,$$

$$h_2^d = \sum_{j+\ell=2} f_j g_\ell = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 34,$$

$$h_3^d = \sum_{j+\ell=3} f_j g_\ell = f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0 = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 60,$$

$$h_4^d = \sum_{j+\ell=4} f_j g_\ell = f_0 g_4 + f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1 = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 70,$$

$$h_5^d = \sum_{j+\ell=5} f_j g_\ell = f_1 g_4 + f_2 g_3 + f_3 g_2 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 70,$$

$$h_6^d = \sum_{j+\ell=6} f_j g_\ell = f_2 g_4 + f_3 g_3 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 59,$$

$$h_7^d = \sum_{j+\ell=7} f_j g_\ell = f_3 g_4 = 4 \cdot 9 = 36.$$

5.4 Convolução cíclica

Repare que na convolução discreta, a quantidade de parcela na soma para cada termo varia. Na convolução cíclica isso não acontece. Se $F = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]$ e $G = [g_0, g_1, \dots, g_{N-1}]$, então $H^d = F *_c G = [h_0^c, h_1^c, \dots, h_{N-1}^c]$, onde

$$h_k^c = \sum_{(j+\ell) \bmod N = k} f_j g_\ell, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Isto é equivalente a pensar na convolução de vetores infinitos e periódicos, com período N . Com esta interpretação, podemos reescrever a expressão acima como

$$h_k^c = \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

onde $g_{k-j} = g_{k-j+N}$, como consequência da periodicidade.

Exemplo 5.5 Tome os sinais discretos, $F = [1, 2, 3, 4]$ e $G = [5, 6, 7, 8]$. Se $H^d = F * G$, então

$$\begin{aligned} h_0^d &= \sum_{j+\ell \bmod 4=0} f_j g_\ell = f_0 g_0 + f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 66 \\ h_1^d &= \sum_{j+\ell \bmod 4=1} f_j g_\ell = f_0 g_1 + f_1 g_0 + f_2 g_3 + f_3 g_2 = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 68, \\ h_2^d &= \sum_{j+\ell \bmod 4=2} f_j g_\ell = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 + f_3 g_3 = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 66, \\ h_3^d &= \sum_{j+\ell \bmod 4=3} f_j g_\ell = f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0 = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 60. \end{aligned}$$

Exercício 5.4 Sejam F, G sinais discretos com N amostras. Se $H^c = F *_c G$, mostre que

$$\check{h}_k^c = \check{f}_k^c \cdot \check{g}_k^c, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$



Esquemáticamente a convolução cíclica pode ser representada com dois círculos concêntricos. Sobre o círculo mais externo, se distribui as amostras de um dos sinais e no círculo mais interno, as amostras do outro sinal, porém no sentido anti-horário. O valor da convolução é obtido pela soma dos produtos das amostras emparelhadas. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 5.6 Considere os sinais discretos $F = [0, 2, 4, 6, 8]$ e $G = [1, 3, 5, 7, 9]$. Se $H = F *_c G$, então H também tem cinco amostras, que podem ser computadas com o auxílio visual dos diagramas da Figura 5.9. As amostras do vetor F foram dispostas no círculo mais externo, no sentido horário, e as amostras do vetor G foram dispostas no círculo mais interno, no sentido anti-horário. Na Figura 5.9(a) vemos exatamente esta disposição. O cálculo da convolução é obtido pela soma do produto das amostras alinhadas, $h_0^c = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 100$. Na Figura 5.9(b) vemos o esquema para o cálculo de h_1^c . Observe que as amostras de F estão nas mesmas posições, mas o círculo interno, com as amostras de G , foi rotacionado em uma posição no sentido horário. Assim, $h_1^c = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 5 = 120$. Na Figura 5.9(c) novamente as amostras de G foram rotacionadas por mais uma posição no sentido horário, resultando em $h_2^c = 0 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 9 + 8 \cdot 7 = 120$. A mesma lógica segue para o cálculo de h_3^c , Figura 5.9(d), e h_4^c , Figura 5.9(e).

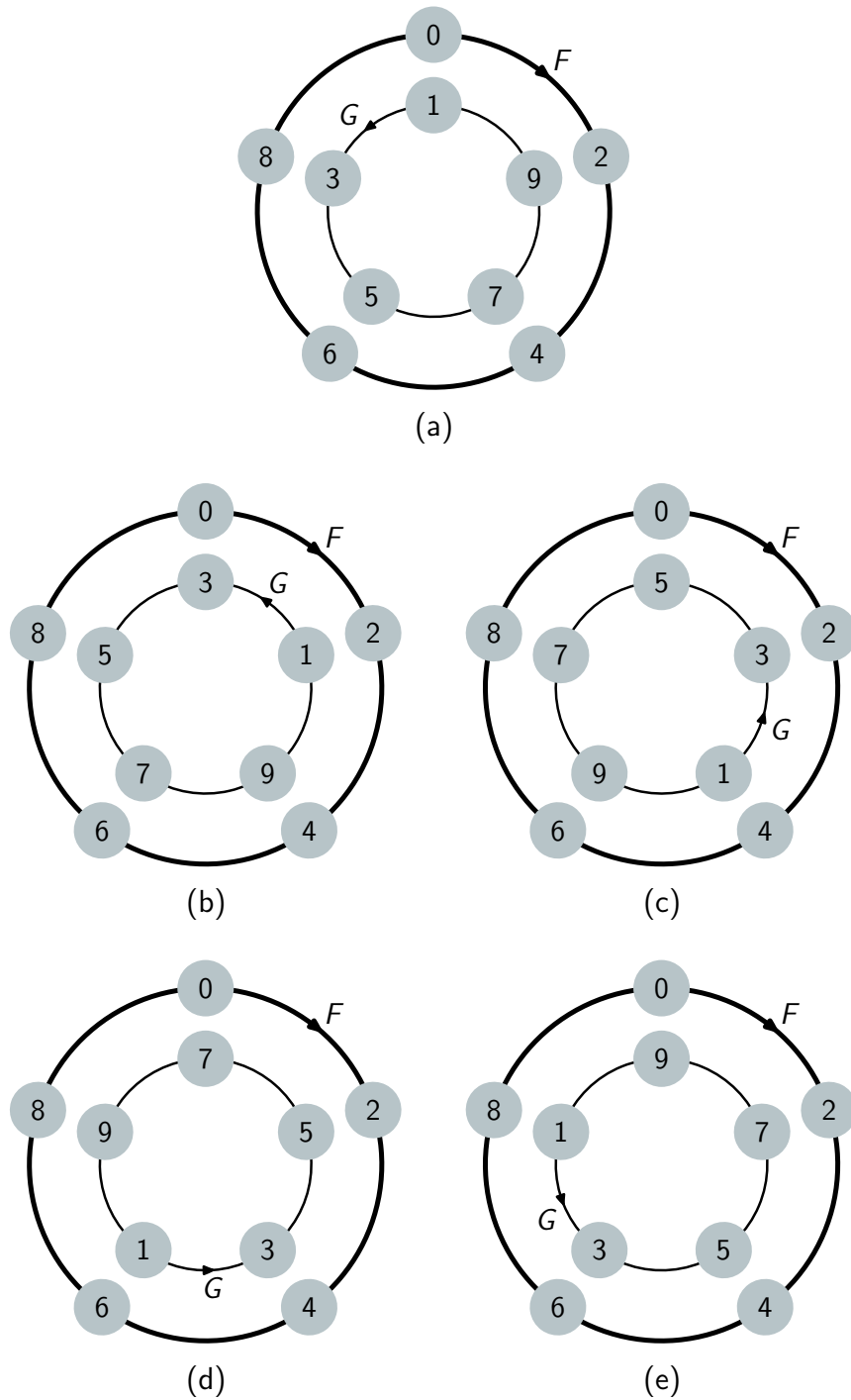
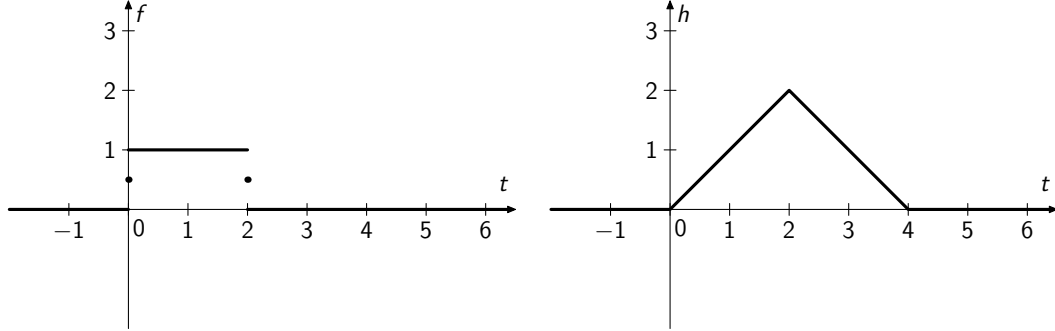


Figura 5.9: Esquema para o cálculo da convolução cíclica, $H = F *_{\text{c}} G$. (a) $h_0^c = 100$. (b) $h_1^c = 120$. (c) $h_2^c = 120$. (d) $h_3^c = 100$. (e) $h_4^c = 60$.

Exemplo 5.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \mu(1 - |t - 1|)$. Defina $h = f * f$. Você pode (e deve) verificar que $h(t) = \max\{0, 2 - |t - 2|\}$ (veja os esboços a seguir). Vamos considerar 3 situações onde a função f é discretizada.



Caso 1: Tome $t_0 = 0$, $\Delta t = 1$ e $N = 6$. Com isso,

$$\begin{aligned} F &= [0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0], \\ H &= [0, 1, 2, 1, 0, 0], \\ H^d &= [0.25, 1, 1.5, 1, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0], \\ H^c &= [0.25, 1, 1.5, 1, 0.25, 0] \end{aligned}$$

Caso 2: Tome $t_0 = -1$, $\Delta t = 1$ e $N = 6$. Com isso,

$$\begin{aligned} F &= [0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0], \\ H &= [0, 0, 1, 2, 1, 0], \\ H^d &= [0, 0.25, 1, 1.5, 1, 0.25, 0, 0, 0, 0], \\ H^c &= [0, 0.25, 1, 1.5, 1, 0.25] \end{aligned}$$

Caso 3: Tome $t_0 = -2$, $\Delta t = 1$ e $N = 6$. Com isso,

$$\begin{aligned} F &= [0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0], \\ H &= [0, 0, 0, 1, 2, 1], \\ H^d &= [0, 0, 0.25, 1, 1.5, 1, 0.25, 0, 0, 0], \\ H^c &= [0.25, 0, 0.25, 1, 1.5, 1] \end{aligned}$$

5.5 Compressão com Fourier

Seja S um sinal discreto, com N amostras. Seja $\check{S}$ a DFT de S , ordenada em ordem decrescente de magnitude,

$$|\check{s}_{i_1}| \geq |\check{s}_{i_2}| \geq \dots \geq |\check{s}_{i_N}|.$$

Suponha que se queira economizar espaço de armazenamento para representar S . Podemos considerar algumas estratégias para isso, sempre com base em manter apenas algumas amostras de $\check{S}$. A aproximação para S é construída aplicando-se a DFT inversa a esse vetor decimado.

Sejam $0 < p \leq 1$ a proporção desejada para a compressão do sinal S , U o sinal compactado e $\check{U}$ sua DFT.

Método 1 [Limiar]: Apenas as $m = \lceil pN \rceil$ amostras de maior magnitude são mantidas. Para $k = 1, \dots, N$, defina

$$\check{u}_{i_k} = \begin{cases} \check{s}_{i_k}, & k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Método 2 [Valor]: Apenas as amostras que tenham pelo menos uma fração da magnitude da maior amostra são mantidas. Para $M = (1 - p)|\check{s}_{i_1}|$ e $k = 1, \dots, N$, defina

$$\check{u}_{i_k} = \begin{cases} \check{s}_{i_k}, & |\check{s}_{i_k}| \geq M, \\ 0, & |\check{s}_{i_k}| < M. \end{cases}$$

Método 3 [Energia]: Apenas as amostras necessária para que a norma Euclidiana de U seja uma fração da norma Euclidiana de S são mantidas. Para m o menor elemento de $\{1, \dots, N\}$ tal que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m |\check{s}_{i_k}|^2} \geq p \sqrt{\sum_{k=1}^N |\check{s}_{i_k}|^2}.$$

Então, defina

$$\check{u}_{i_k} = \begin{cases} \check{s}_{i_k}, & k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Exemplo 5.8 Na Figura 5.10 vemos um sinal discreto com 339 amostras. Este sinal foi compactado pelos três métodos descritos, sempre usando $p = 0.85$.

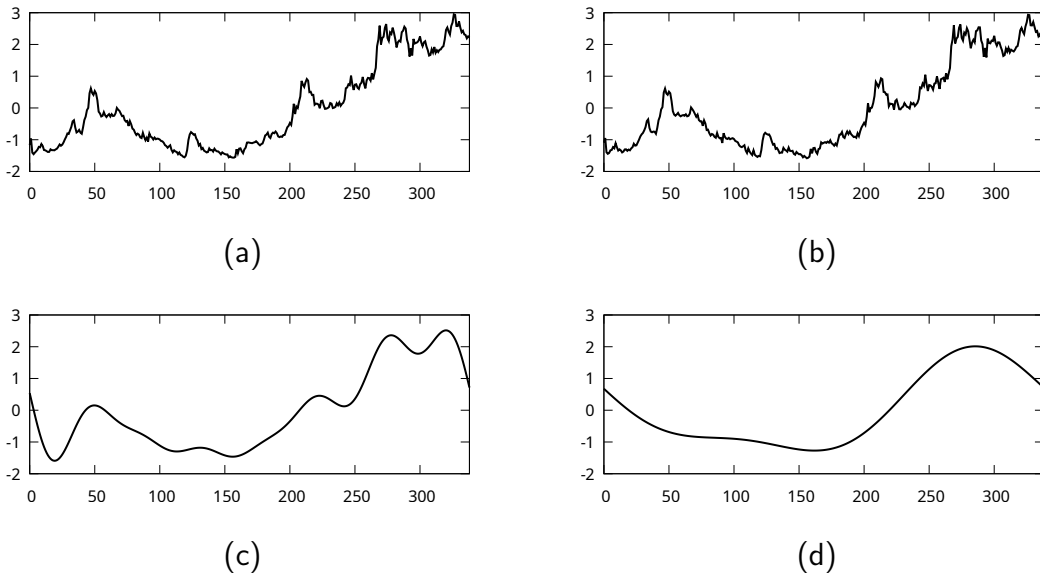


Figura 5.10: (a) Sinal original, (b) compressão pelo método 1, (c) compressão pelo método 2, (d) compressão pelo método 3, sempre usando $p = 0.85$.

A tabela abaixo exibe o resultado da compressão pelos três métodos e o erro quadrático médio em cada caso.

Método	Compressão	Erro
Limiar	14%	2%
Valor	96%	28%
Energia	99%	52%

Como percebemos com este exemplo, DFT não é uma boa ferramenta para compressão de sinais.

Exercício 5.5 Considere o sinal discreto $s = [-1, 2, 1, 4, -3, -2, 0, 1]$. Utilize a DFT para compactar o sinal s em 90% de sua energia. 

5.6 Exercícios propostos

Exercício 5.6 Compute a DFT dos seguintes sinais discretos f_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$:

(a) $f_j = \cos(\pi j)$. (b) $f_j = \cos(\pi j/2)$. (c) $f_j = a^j$, $a \neq 0$.

Exercício 5.7 Seja n um inteiro positivo. Compute a DFT do sinal discreto $f_j = j - n$, $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Exercício 5.8 Para um sinal discreto f_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, mostre que

$$\sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\check{f}_k|^2.$$

Exercício 5.9 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$, para $|t| > T/2 > 0$.

(a) Qual é a relação entre os coeficientes da série de Fourier de f em $[-T/2, T/2]$ e a transformada de Fourier de f ?

(b) Qual é a consequência desse fato em termos de DFT?

(c) Baseado em (a) e (b), descreva um procedimento de interpolação para uma função discretizada em um intervalo qualquer $[t_a, t_b]$.

(d) Prove que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(2n\pi/T)|^2.$$

Exercício 5.10 Seja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $s(t) = e^{-t}$, para $t \in [0, 2]$ e $s(t) = 0$, caso contrário. Tome as amostras $s_j = s(j/2)$, para $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

(a) Encontre a transformada de Fourier de s .

(b) Encontre a transformada de Fourier discreta das seguintes discretizações de s :

$$a = [s_0, s_1, s_2, s_3], \quad b = [s_0, s_1, s_2, s_3, s_4], \quad \text{e } c = [(s_0 + s_4)/2, s_1, s_2, s_3].$$

(c) Analise os resultados obtidos e comente sobre as diferentes escolhas das amostras.

Exercício 5.11 Seja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o pulso de Ricker, isto é $s(t) = (1 - 2a^2 t^2) \exp(-a^2 t^2)$, com $a > 0$. Complete o estudo deste pulso, iniciado no Exercício 2.18, determinando em função do parâmetro a qual deve ser a razão de amostragem Δt e intervalo adequados para amostrar a função s de modo a reconstruir o pulso acuradamente.

Capítulo 6

Filtros

Um *filtro* é uma operação realizada sobre um sinal que, como resultado, produz outro sinal. Filtros são utilizados para diversos propósitos, como remoção de ruído, suavização, interpolação, etc. De forma mais precisa, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é um sinal, um filtro H é um operador linear que mapeia f em $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, o sinal modificado, ou seja $f_h(t) = H[f](t)$.

6.1 Filtros convolucionais

Vamos considerar filtros descritos por convoluções, ou seja, o operador H é definido por uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$f_h(t) = H[f](t) = (h * f)(t).$$

A função h é dita o *núcleo* do filtro. Para filtros desta forma, valem as propriedades:

- (a) $H[f + g](t) = H[f](t) + H[g](t)$.
- (b) $H[af](t) = aH[f](t)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (c) $H[f(t - a)] = H[f](t - a)$ (com certo abuso de notação), para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

As duas primeiras propriedades configuram a *linearidade* do filtro convolucional, enquanto que a última é a propriedade de *invariância temporal*. 

Das propriedades da transformada de Fourier temos

$$\hat{f}_h(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega).$$

Um número complexo z pode ser representado em notação polar como $z = \rho e^{i\theta}$, onde ρ é o módulo ou *magnitude* de z e θ é a *fase* de z . No caso de uma função $\hat{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ também é possível representá-la como

$$\hat{q}(\omega) = M_q(\omega) e^{i\phi_q(\omega)},$$

onde $M_q(\omega) = |\hat{q}(\omega)|$ é a magnitude e $\phi_q(\omega)$ é a fase. Desta forma,

$$\begin{aligned} \hat{f}_h(\omega) &= \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) = M_h(\omega) e^{i\phi_h(\omega)} \cdot M_f(\omega) e^{i\phi_f(\omega)} \\ &= M_h(\omega) M_f(\omega) e^{i(\phi_h(\omega) + \phi_f(\omega))} = M_{f_h}(\omega) e^{i\phi_{f_h}(\omega)}. \end{aligned}$$

Observe que se $f(t) = \delta(t)$, então

$$f_h(t) = (h * f)(t) = (h * \delta)(t) = h(t).$$

Ou seja, o núcleo do filtro é o resultado da aplicação do filtro à Delta de Dirac.

6.2 Filtro passa baixa

O filtro *passa baixa ideal* ou *retangular* é construído para preservar as frequências do espectro de uma função dentro de um certo limiar ω_c . Ou seja, $\hat{f}_h(\omega) = 0$, para $|\omega| > \omega_c$, sem alterar as frequências para $|\omega| \leq \omega_c$. No domínio da frequência, este filtro é dado pela função caixa

$$\hat{R}(\omega; \omega_c) = \mu(\omega_c - |\omega|) = \mu(1 - |\omega|/\omega_c) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases},$$

cuja inversa de Fourier é dada por

$$R(t; \omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t / \pi).$$

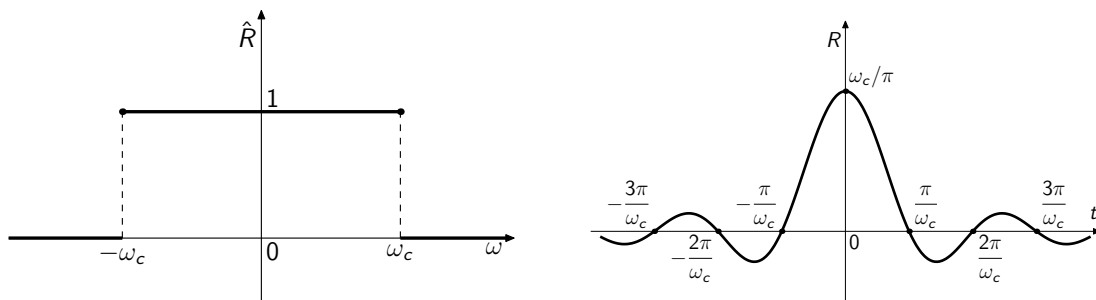


Figura 6.1: À esquerda, o gráfico de $\hat{R}(\omega)$. À direita, o gráfico de $R(t)$.

Exemplo 6.1 Se $f(t) = \delta(t)$ então a *delta de banda limitada* é

$$\delta_R(t) = R(t; \omega_g) * f(t) = R(t; \omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t / \pi),$$

ou seja, a própria função R .

Exemplo 6.2 Para $f(t) = \mu(t)$, temos

$$\begin{aligned} \mu_R(t) &= R(t; \omega_c) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau; \omega_c) \mu(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t R(\tau; \omega_c) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c \tau / \pi) d\tau = \int_{-\infty}^{\omega_c t / \pi} \text{sinc}(x) dx. \end{aligned}$$

Vamos analisar a função μ_R . Em primeiro lugar, veja que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) dx = 1.$$

Veja também que

$$\mu_R(\pi/\omega_c) = \int_{-\infty}^1 \text{sinc}(x) dx = \int_{-\infty}^0 \text{sinc}(x) dx + \int_0^1 \text{sinc}(x) dx \approx 0.5 + 0.59 = 1.09$$

e

$$\mu_R(-\pi/\omega_c) = \int_{-\infty}^{-1} \text{sinc}(x) dx = \int_{-\infty}^0 \text{sinc}(x) dx + \int_0^{-1} \text{sinc}(x) dx \approx 0.5 - 0.59 = 0.09.$$

Na Figura 6.2, estão exibidos os gráficos das funções μ e μ_R , versão filtrada apenas as baixas frequências da função μ (com a escolha de $\omega_c = \pi$).

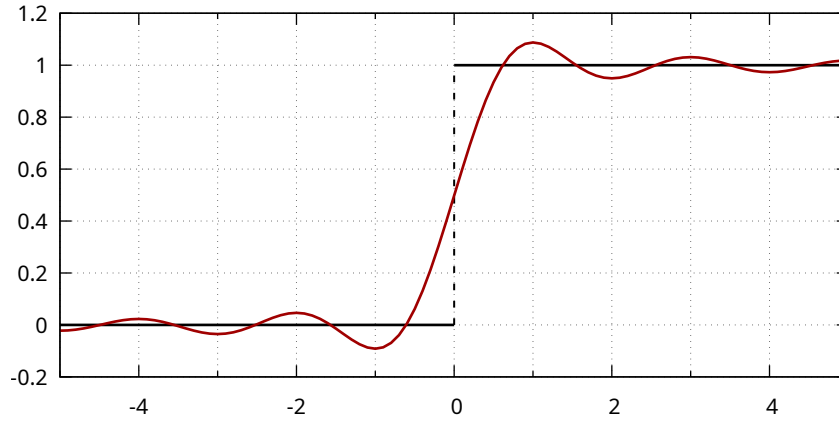


Figura 6.2: Em preto, o gráfico da função degrau de Heaviside e em vermelho o gráfico da função degrau após a aplicação do filtro passa baixa com frequência máxima $\omega_c = \pi$.

Observe que alterar o valor de ω_c implica apenas em contrair ou expandir o gráfico de μ_R , mas não de alterar a amplitude das oscilações observadas que, próximas à origem, são da ordem de 9%. Este efeito é conhecido com **fenômeno de Gibbs** e deve-se à descontinuidade (de salto) do filtro.

Uma forma de tentar mitigar o fenômeno de Gibbs é construir um filtro que seja contínuo na frequência. Considere, por exemplo, o filtro **trapezoidal**, definido por

$$Z(\omega; \omega_c, d_\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c - d_\omega, \\ \frac{\omega_c + d_\omega - |\omega|}{2d_\omega}, & \omega_c - d_\omega \leq |\omega| \leq \omega_c + d_\omega, \\ 0, & |\omega| > \omega_c + d_\omega, \end{cases}$$

onde $0 < d_\omega < \omega_c$ (veja o gráfico na Figura 6.3).

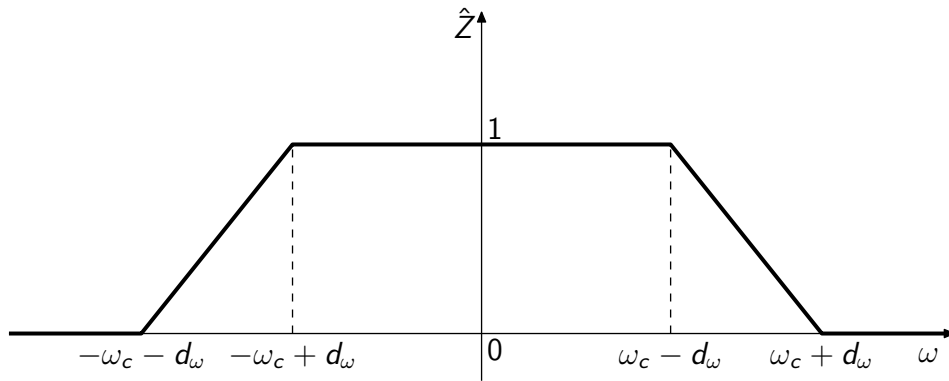


Figura 6.3: Filtro trapezoidal no domínio da frequência.

A expressão do filtro trapezoidal no domínio do tempo pode ser facilmente obtida se conhecermos e usarmos o resultado

$$\hat{Z}(\omega; \omega_c, d_\omega) = \hat{R}(\omega; \omega_c) * \frac{1}{2d_\omega} \hat{R}(\omega; d_\omega).$$

Com isto,

$$\begin{aligned} Z(t; \omega_c, d_\omega) &= 2\pi R(t; \omega_c) \cdot \frac{1}{2d_\omega} R(t; d_\omega) \\ &= 2\pi \operatorname{sinc}(\omega_c t / \pi) \frac{1}{2d_\omega} \frac{d_\omega}{\pi} \operatorname{sinc}(d_\omega t / \pi) \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_c t / \pi) \operatorname{sinc}(d_\omega t / \pi). \end{aligned}$$

6.3 Filtro passa banda

Um *filtro passa banda* é construído para que a amplitude do espectro do sinal filtrado, fora de um intervalo específico de frequências, seja nula. Na frequência, um filtro passa baixa pode ser construído a partir de dois filtros passa baixa. Por exemplo, no caso de filtros retangulares temos

$$\hat{B}(\omega; \omega_a, \omega_b) = \hat{R}(\omega; \omega_b) - \hat{R}(\omega; \omega_a).$$

6.4 Tipos de filtros passa baixa

Há vários tipos usuais de filtros passa baixa. A seguir, listamos alguns. Em todos os casos, c é um número real positivo.

Retangular: $R(x; c) = \mu(1 - |x|/c) = \begin{cases} 1, & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$

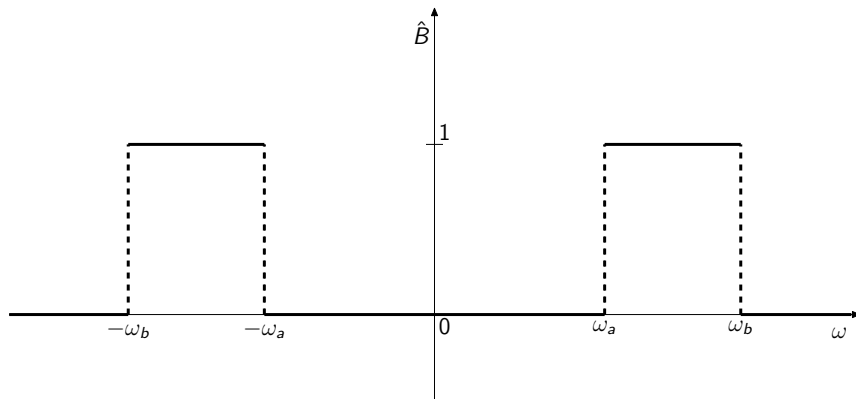


Figura 6.4: Filtro passa banda no domínio da frequência.

Triangular: $T(x; c) = r(1 - |x|/c) = \max\{0, 1 - |x|/c\}$

Hann: $H_n(x; c) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\pi x/c), & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$

Hamming: $H_m(x; c) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\pi x/c), & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$

Blackmann: $L(x; c) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\pi x/c) + 0.08 \cos(2\pi x/c), & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$

Gabor: $G(x; c) = e^{-4x^2/c^2}.$

Os gráficos desses filtros estão esboçados na Figura 6.5.

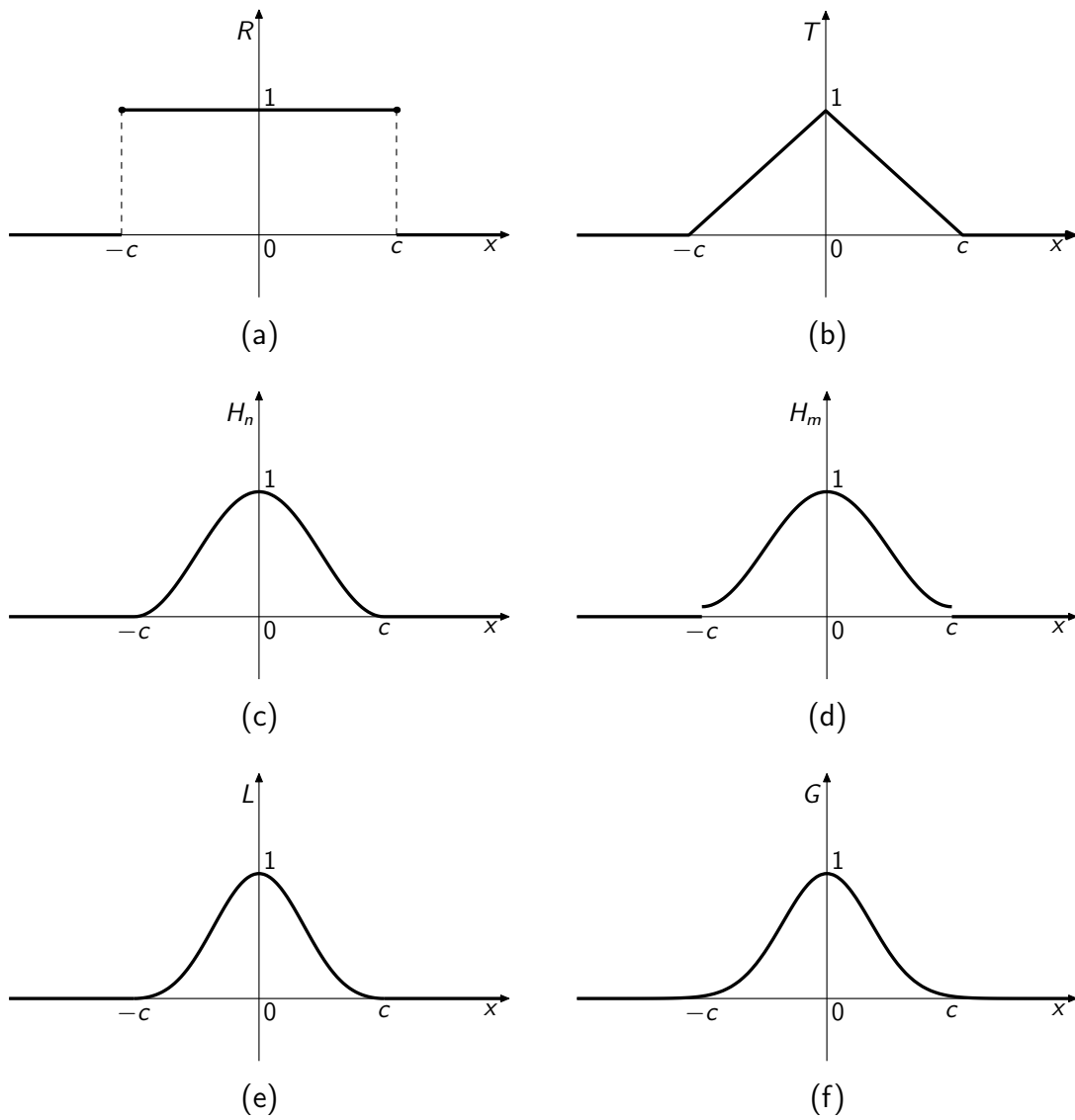


Figura 6.5: Esboço dos filtros passa baixa (a) retangular, (b) triangular, (c) Hann, (d) Hamming, (e) Blackman e (f) Gabor.

Exemplo 6.3 Neste exemplo aplicamos os seis filtros passa baixa a um sinal discreto com 71 amostras da função degrau de Heaviside, tomadas a $\Delta t = 1$ entre -35 e 35 (Figura 6.6). Observe que os melhores resultados foram obtidos com os filtros de Blackmann e Gabor.

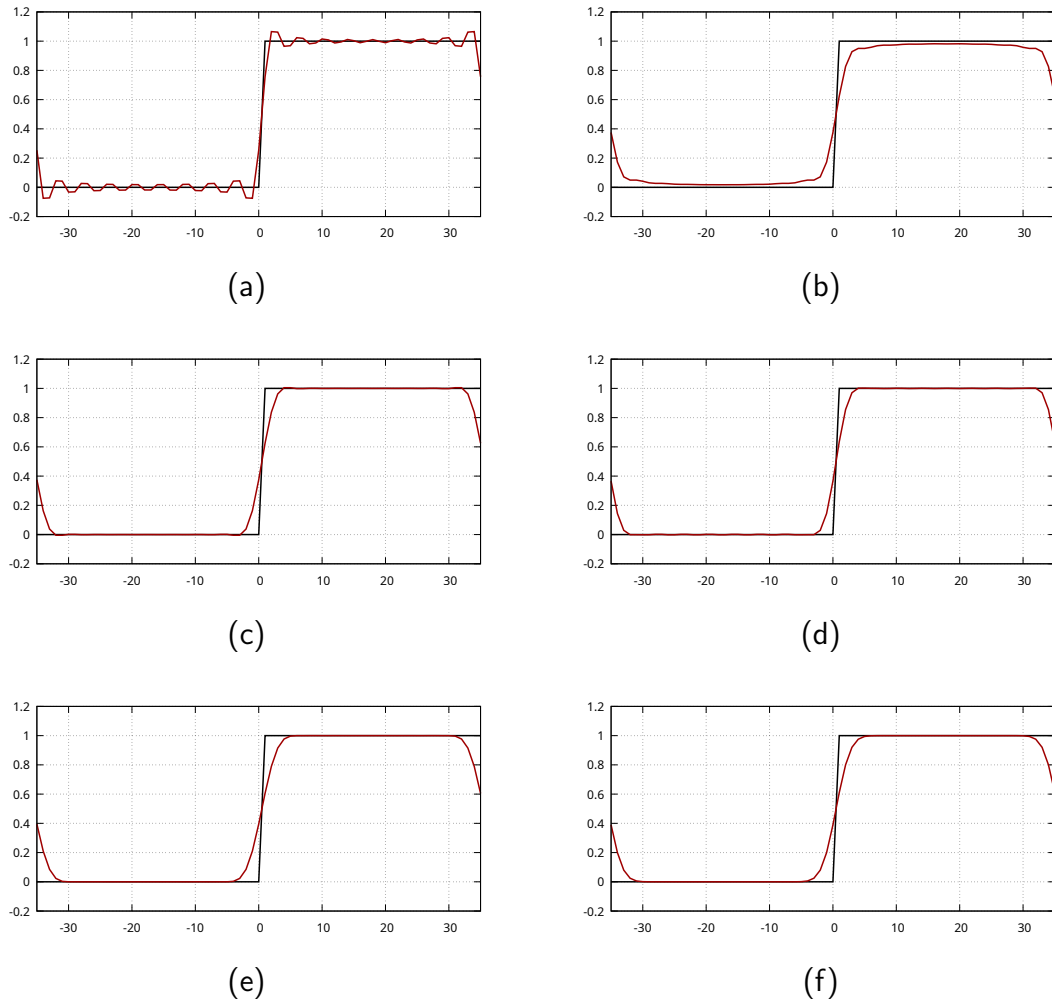


Figura 6.6: Exemplo de filtros passa baixa aplicado a função degrau de Heaviside com $\omega_c = \omega_q/2$. Em preto, o sinal original e, em vermelho, o sinal filtrado. (a) retangular, (b) triangular, (c) Hann, (d) Hamming, (e) Blackmann e (f) Gabor.

Veja agora os resultados dos mesmos filtros aplicados a um sinal com 339 amostras.

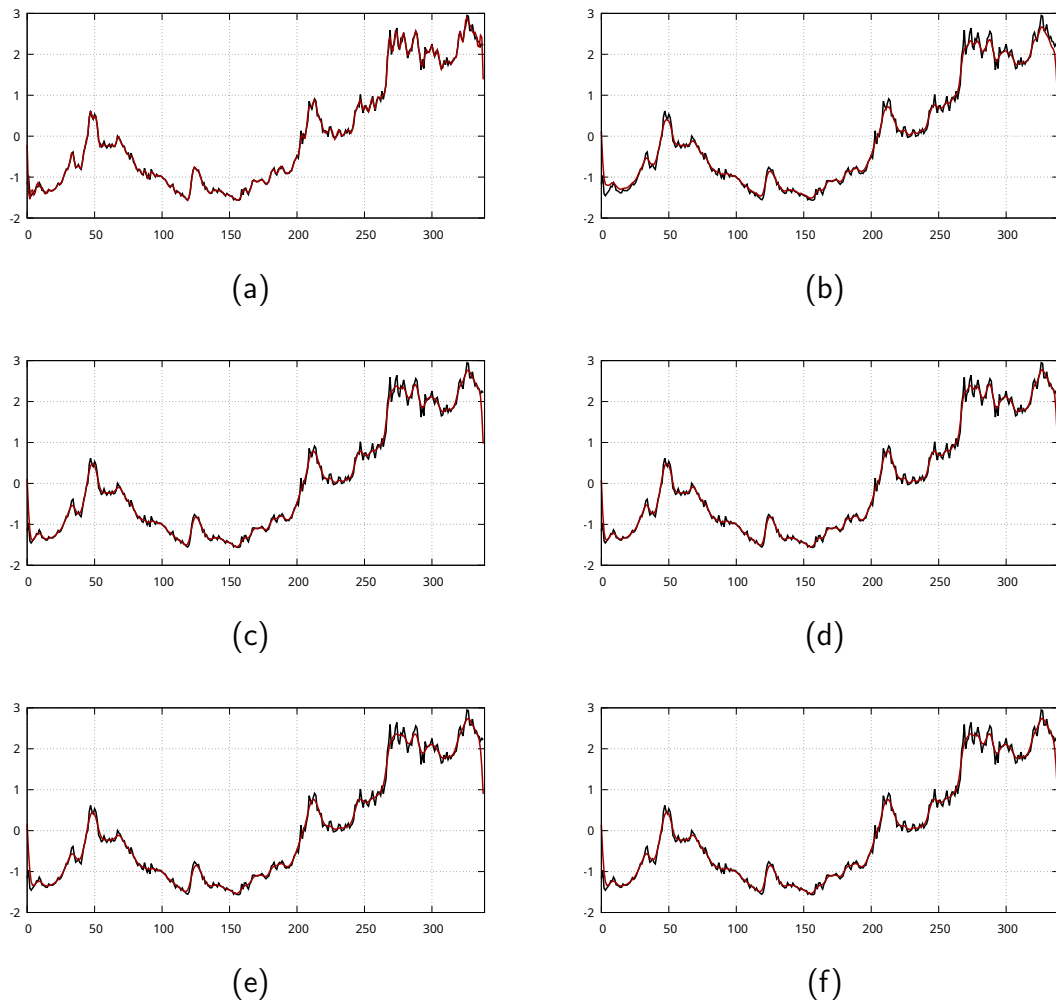


Figura 6.7: Exemplo de filtros passa baixa aplicado a um sinal com 339 amostras, tomando $\omega_c = \omega_q/2$. Em preto, o sinal original e, em vermelho, o sinal filtrado. (a) retangular, (b) triangular, (c) Hann, (d) Hamming, (e) Blackmann e (f) Gabor.

6.5 Transformada de Fourier com janela

Duas desvantagens da Transformada de Fourier é que ela requer o conhecimento completo do sinal e, apesar de fornecer informação precisa sobre o conteúdo de frequência, não fornece nenhuma informação sobre sua localização temporal. Podemos superar estes problema através do uso de uma *função janela*. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1$, a *transformada de Fourier com janela* de uma função f é definida como

$$\hat{f}(\omega; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt,$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Intuitivamente, devemos escolher funções g que sejam praticamente nulas, exceto numa pequena região em torno da origem. As funções da seção anterior, usadas como filtros passa baixa, são escolhas possíveis. Desta forma, $\hat{f}(\omega; \tau)$ fornece informação sobre o conteúdo de frequência apenas na vizinhança de τ , ou seja, localizando temporalmente o conteúdo de frequência.

Com a definição acima para a transformada com janela, como seria a transformada inversa? Observe que,

$$f(t)g(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega; \tau) e^{i\omega t} d\omega.$$

Integrando ambos os lados com respeito a τ , temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega; \tau) e^{i\omega t} d\omega d\tau.$$

Note também que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega; \tau) d\tau.$$

Exemplo 6.4 Considere os sinais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$f(t) = \sin(10t) + \sin(20t) \quad \text{e} \quad g(t) = \begin{cases} \sin(10t), & 0 \leq t \leq 4, \\ 0, & 4 < t < 8, \\ \sin(20t), & t \geq 8. \end{cases}$$

Ambas as funções tem contribuições nas frequências de 10Hz e 20Hz. Entretanto, no caso da função f essas frequências estão presentes em todas as janelas temporais, enquanto que para a função g , claramente, cada frequência está presente em intervalos temporais distintos e disjuntos.

A Figura 6.8 exibe o gráfico de f , o módulo de sua transformada de Fourier clássica e a transformada de Fourier com janela. Neste exemplo, a janela utilizada foi a função de Gabor com $c = 2$.

A Figura 6.9 exibe o gráfico de g , o módulo de sua transformada de Fourier clássica e a transformada de Fourier com janela. Do ponto de vista qualitativo, não há grande diferenças entre os gráficos da transformada de Fourier de f e g . Porém, diferentemente da figura anterior, fica claro que a presença de sinal na frequência de 10Hz acontece para $\tau \leq 4$, enquanto que o sinal de frequência 20Hz está presente apenas para $\tau \geq 8$.

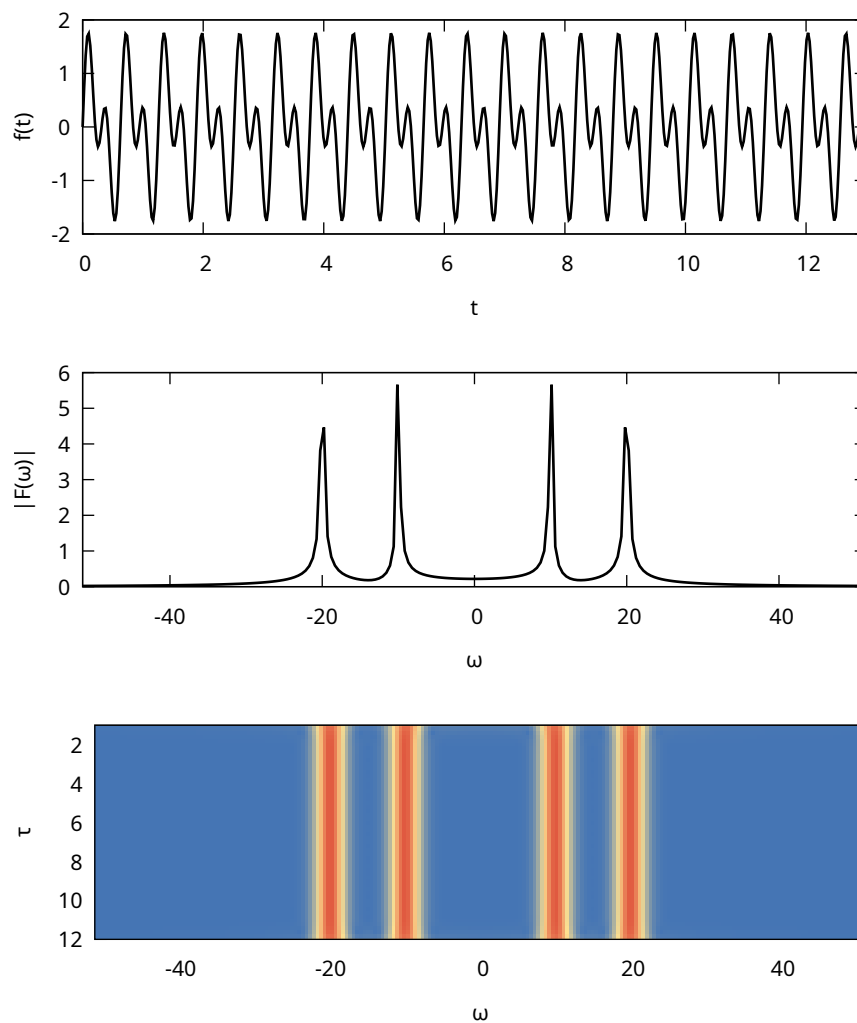


Figura 6.8: No topo, o gráfico da função $f(t)$, no centro, o gráfico do valor absoluto de $\hat{f}(\omega)$ e, no rodapé, o gráfico de $\hat{f}(\omega, \tau)$. 

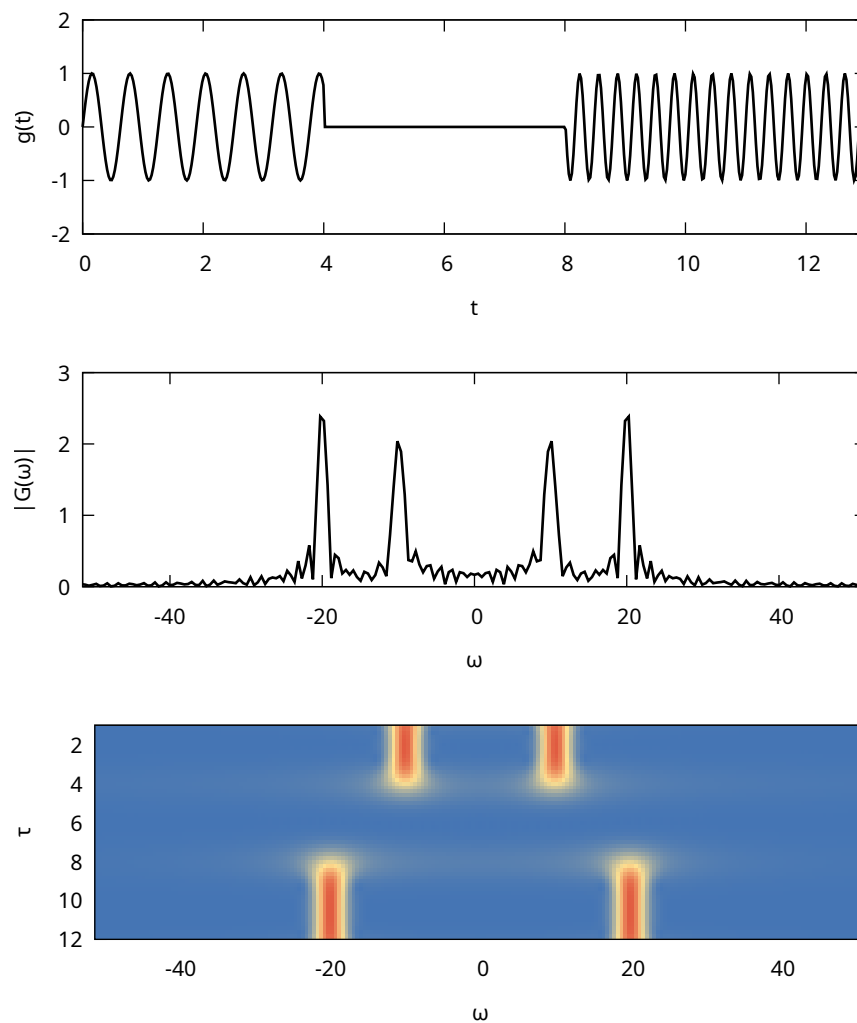


Figura 6.9: No topo, o gráfico da função $g(t)$, no centro, o gráfico do valor absoluto de $\hat{g}(\omega)$ e, no rodapé, o gráfico de $\hat{g}(\omega, \tau)$.

Exemplo 6.5 Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \sin(t^2)$. Neste caso, o conteúdo de frequência do sinal varia continuamente.

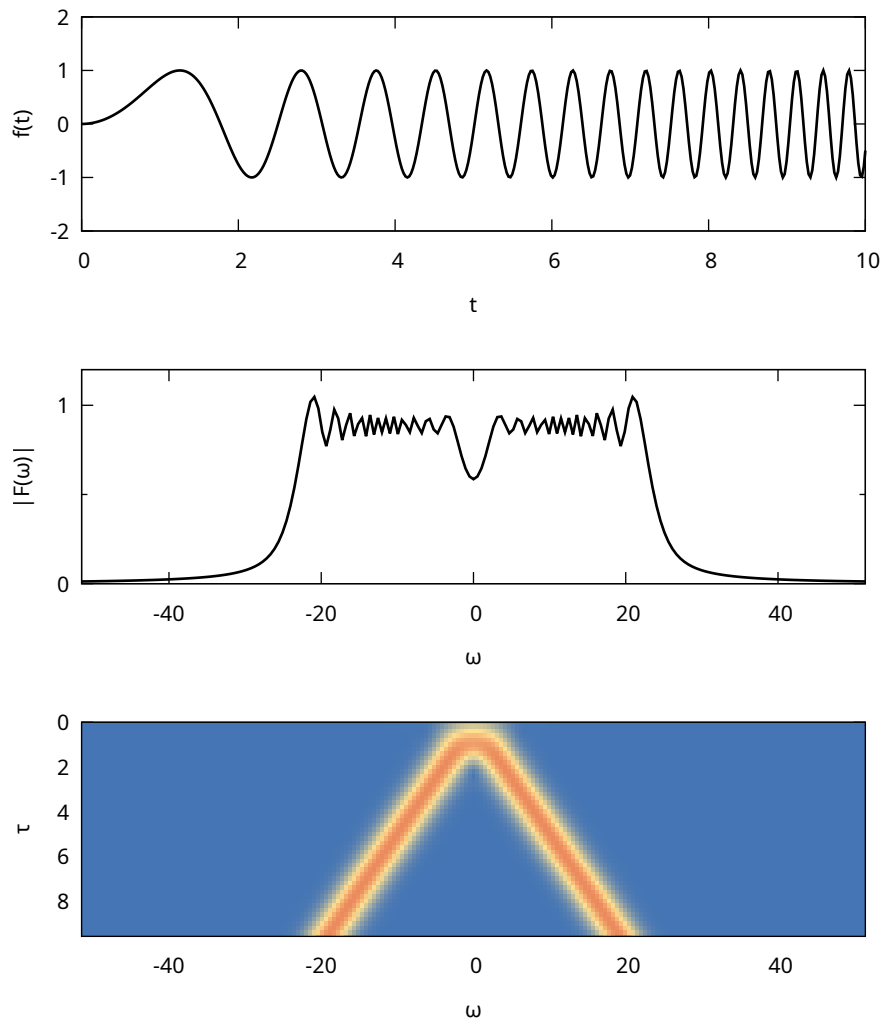


Figura 6.10: No topo, o gráfico da função $f(t)$, no centro, o gráfico do valor absoluto de $\hat{f}(\omega)$ e, no rodapé, o gráfico de $\hat{f}(\omega, \tau)$.

Exercício 6.1 Seja $B_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um filtro passa baixa com as seguintes características: $B_a(\omega) = 0$ se $|\omega| \geq a > 0$, $0 < B_a(\omega) \leq 1$ se $|\omega| < a$ e $B_a(0) = 1$. Considere os filtros A_1 e A_2 definidos por $A_1(\omega) = B_{1/a}(1/\omega)$ para $\omega \neq 0$ e $A_1(0) = 0$, e $A_2(\omega) = 1 - B_a(\omega)$.

(a) Esboce os gráficos de B_a , A_1 e A_2 .

(b) Compare a atuação dos filtros A_1 e A_2 .



6.6 Exercícios propostos

Exercício 6.2 Analise, algébrica e graficamente, os filtros a seguir.

(a) **Gaussiano:** $\hat{G}(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_G)^2}$, $\omega_G > 0$.

(b) **Eliminador:** $\hat{E}(\omega) = \mu(|\omega - \omega_E| - \epsilon)$, $\omega_E \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$.

Exercício 6.3 Seja $\omega_c > 0$ e considere o filtro de Hann no domínio da frequência,

$$\hat{H}_n(\omega; \omega_c) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\pi\omega/\omega_c), & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

(a) Determine $H_n(t; \omega_c)$ e o analise algébrica e graficamente.

(b) Dados $\omega_m > \omega_h > 0$, analise a atuação do filtro definido por

$$\hat{E}(\omega) = \hat{H}_n(\omega + \omega_m; \omega_h) + \hat{H}_n(\omega - \omega_m; \omega_h).$$

(c) Analise computacionalmente a atuação do filtro E .

Exercício 6.4 Seja F_a um filtro passa baixa tal que $F_a(\omega) = 0$, para $|\omega| > a > 0$. Descreva a atuação dos seguintes filtros.

(a) $A(\omega) = [F_a * F_a](\omega)$.

(b) $B(\omega) = F_a(\omega + b) + F_a(\omega - b)$, para $b > a$.

(c) $C(\omega) = 1/[1 + F_a(\omega)^2]$.

(d) $D(\omega) = F_{1/a}(1/\omega)$, para $\omega \neq 0$, e $D(0) = 0$.

Capítulo 7

Sinais analíticos

Como referência para sinais analíticos e transformada de Hilbert, indicamos [Chapman \(2004\)](#) e [Pujol \(2003\)](#).

7.1 Transformada de Hilbert

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Neste caso,



$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[- \int_{\infty}^0 \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\overline{\int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega} + \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right]. \end{aligned}$$

Definindo o *sinal analítico* de f , como $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, com

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.1)$$

temos

$$f(t) = \operatorname{Re}[F(t)].$$

Se a parte real do sinal analítico é a função f , o que será a parte imaginária? Veja que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}[F(t)] &= \frac{1}{2i}[F(t) - \overline{F(t)}] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \overline{\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}} d\omega \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \int_0^\infty \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{-\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty -i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.
 \end{aligned}$$

Caso exista função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\hat{h}(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega)$, então

$$\operatorname{Im}[F(t)] = \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] = (f * h)(t).$$

Lembre que $\mathcal{F}[\operatorname{sign}](\omega) = 2/(i\omega)$, então

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega)] = -i \frac{1}{2\pi} \frac{2}{i(-t)} = \frac{1}{\pi t},$$

no sentido de distribuição. Com isso,

$$\operatorname{Im}[F(t)] = (f * h)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \equiv \mathcal{H}[f](t). \quad (7.2)$$

O operador $\mathcal{H}$ é denominado a *transformada de Hilbert*. A integral acima deve ser entendida no sentido do *valor principal de Cauchy*, ou seja,

$$\mathcal{H}[f](t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^\infty \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \right].$$

Denotando $\tilde{f}(t) = \mathcal{H}[f](t)$, o sinal analítico de f é, por fim,

$$F(t) = \operatorname{Re}[F(t)] + i \operatorname{Im}[F(t)] = f(t) + i \tilde{f}(t). \quad (7.3)$$

Exemplo 7.1 Seja $f(t) = \cos(t)$. Então,

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))] \\
 &= -i\pi \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega + 1) \operatorname{sign}(\omega) + \delta(\omega - 1) \operatorname{sign}(\omega)] \\
 &= -i\pi \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega + 1) \operatorname{sign}(-1) + \delta(\omega - 1) \operatorname{sign}(1)] \\
 &= -i\pi \mathcal{F}^{-1}[-\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[i\pi(\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1))] = \operatorname{sen}(t).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$F(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) = e^{it} \quad \text{e} \quad |F(t)| = 1.$$

Exemplo 7.2 Seja $f(t) = \sin(t)$. Então,

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \pi i (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1))] \\
 &= \pi \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega + 1) \operatorname{sign}(\omega) - \delta(\omega - 1) \operatorname{sign}(\omega)] \\
 &= \pi \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega + 1) \operatorname{sign}(-1) - \delta(\omega - 1) \operatorname{sign}(1)] \\
 &= \pi \mathcal{F}^{-1}[-\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \\
 &= -\mathcal{F}^{-1}[\pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))] = -\cos(t).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$F(t) = \sin(t) - i \cos(t) = -ie^{it} \quad \text{e} \quad |F(t)| = 1.$$

Exemplo 7.3 Vamos computar a transformada de Hilbert da Delta de Dirac. Com efeito,

$$\tilde{\delta}(t) = \mathcal{H}[\delta](t) = (\delta * h)(t) = h(t).$$

Logo, a **delta de Dirac analítica** é

$$\Delta(t) = \delta(t) + \frac{i}{\pi t}.$$

Para uma função f qualquer, com sinal analítico F , observe que

$$F(t) = f(t) + i\tilde{f}(t) = (f * \delta)(t) + i(f * h)(t) = [f * (\delta + ih)](t) = (f * \Delta)(t).$$

Exemplo 7.4 Seja $a > 0$ e considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = a^2/(a^2 + t^2)$. Então $\hat{f}(\omega) = a\pi e^{-a|\omega|}$ e, portanto, 

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[-ia\pi \operatorname{sign}(\omega) e^{-a|\omega|}] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[-ia \operatorname{sign}(\omega) \pi e^{-a|\omega|}] = \frac{1}{a} \mathcal{F}^{-1}\left[i \frac{d}{d\omega} a\pi e^{-a|\omega|}\right] \\
 &= \frac{at}{a^2 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$F(t) = \frac{a^2}{a^2 + t^2} + i \frac{at}{a^2 + t^2} = \frac{a(a + it)}{a^2 + t^2} = \frac{a}{a - it} = \frac{ia}{t + ia}.$$

Além disso,

$$|F(t)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

A Figura 7.1 exibe os gráficos de f , $\tilde{f}$ e a faixa destacada está compreendida entre $F(t)$ e $-F(t)$, no caso de $a = 1/2$.

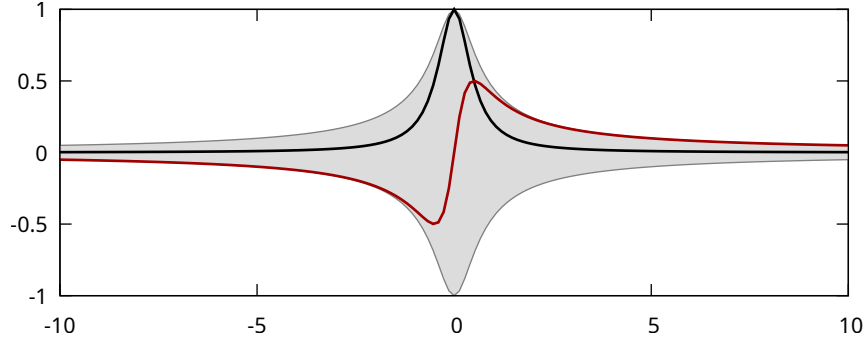


Figura 7.1: Gráficos de f , em preto, e $\tilde{f}$, em vermelho. A região em cinza está compreendida entre os gráficos de F e $-F$.

Exercício 7.1 Encontre o sinal analítico de $f(t) = \text{sinc}(t)$, lembrando que $\hat{f}(\omega) = \mu(\pi - |\omega|)$. 

Exercício 7.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que:

- (a) Se f é par, então $\tilde{f}$ é ímpar.
- (b) Se f é ímpar, então $\tilde{f}$ é par.
- (c) Se f é diferenciável, então $\mathcal{H}[f'](t) = \frac{d}{dt}\mathcal{H}[f](t)$. 

7.2 Propriedades da transformada de Hilbert

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ sua transformada de Hilbert e F o sinal analítico correspondente. Então valem as seguintes propriedades (demonstradas em A.36):

- (a) $\mathcal{H}^2 = -\mathcal{I}$ ou, equivalentemente, $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$.
- (b) $\mathcal{H}[F](t) = -iF(t)$.
- (c) $\hat{F}(\omega) = 2\mu(\omega)\hat{f}(\omega)$.

7.3 Tempo complexo

O par de transformadas

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right],$$

é conveniente quando trabalhamos com **tempo complexo**, $\xi = t + i\nu$, com $\nu \geq 0$. Assim, para $\xi \in \mathbb{C}$, com $\text{Im}(\xi) \geq 0$, definimos

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega\xi} d\omega.$$

A função $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é denominada a *extensão analítica* de f e tem as seguintes propriedades:

- (a) F é contínua em $\text{Im}(\xi) \geq 0$ e analítica em $\text{Im}(\xi) > 0$.
- (b) Se $\text{Im}(\xi) \rightarrow \infty$ então $F(\xi) \rightarrow 0$.
- (c) $\text{Re}[F(t)] = f(t)$.

Em particular,

$$\Delta(\xi) = \int_0^\infty \hat{\delta}(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega = \left. \frac{e^{i\omega\xi}}{i\pi\xi} \right|_0^\infty = \frac{0 - 1}{i\pi\xi} = \frac{i}{\pi\xi} = \frac{\nu + it}{\pi(\nu^2 + t^2)}.$$

Compare este resultado com o Exemplo 7.4.

7.4 Aplicação em Sísmica de Reflexão

Em sísmica de reflexão um *traço sísmico* é o sinal temporal da perturbação na pressão registrada em um receptor, após a propagação de uma onda sísmica pela subsuperfície terrestre, interagindo com esta através de reflexões e transmissões. De forma simplificada, considere um sinal $f(t)$ emitido em uma posição S a partir de $t = 0$, uma superfície refletora Σ na subsuperfície, e um sinal $g(t)$ registrado em um receptor na posição R . A teoria assintótica para propagação de ondas afirma que

$$g(t) = \text{Re}[G(t)], \quad \text{com } G(t) = A \cdot F(t - \tau),$$

onde A é um fator de amplitude, τ é o tempo de reflexão, ambos dependentes de S e R , e F é o sinal analítico de f . G é denominada *traço analítico* e imediato que

$$\text{Im}[G(t)] = \tilde{g}(t) = \mathcal{H}[g](t).$$

Um dos problemas fundamentais é, dado o traço sísmico $g(t)$, encontrar A e τ , supondo conhecido o sinal emitido f . Da equação acima, G é computada a partir de g através da transformada de Hilbert.

Como exemplo, considere como sinal emitido a função do Exemplo 7.4. Para $A \in \mathbb{R}$, temos

$$g(t) = \text{Re}[A \cdot F(t - \tau)] = Af(t - \tau).$$

Neste caso, o traço sísmico tem o comportamento esboçado no gráfico no topo da Figura 7.2 ($A > 0$). Perceba que é fácil identificar os valores de A e τ . Porém, durante a propagação, o fator de amplitude A pode ser um número complexo. Considere então $A = A_R + iA_I$, com $A_R, A_I \in \mathbb{R}$. Neste caso

$$\begin{aligned} G(t) &= A \cdot F(t - \tau) = (A_R + iA_I)[f(t - \tau) + i\tilde{f}(t - \tau)] \\ &= [A_R f(t - \tau) - A_I \tilde{f}(t - \tau)] + i[A_I f(t - \tau) + A_R \tilde{f}(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} g(t) = \text{Re}[G(t)] = A_R f(t - \tau) - A_I \tilde{f}(t - \tau), \\ \tilde{g}(t) = \text{Im}[G(t)] = A_I f(t - \tau) + A_R \tilde{f}(t - \tau). \end{cases}$$

O gráfico no centro da Figura 7.2 ilustra como seria o traço sísmico registrado no caso de um fator de amplitude complexo (com $A_R > 0$ e $A_I > 0$). Veja que os mesmos valores para $|A|$ e τ seguem marcados, mas não seria óbvio identificá-los analisando apenas o gráfico. No último gráfico da Figura 7.2 está exibido o valor absoluto do traço analítico, $|G(t)| = \sqrt{g(t)^2 + \tilde{g}(t)^2}$. Observe que novamente o pico da função localiza corretamente o valor de τ e também a amplitude no pico foi recuperada. Sabendo τ , podemos computar A_R e A_I .

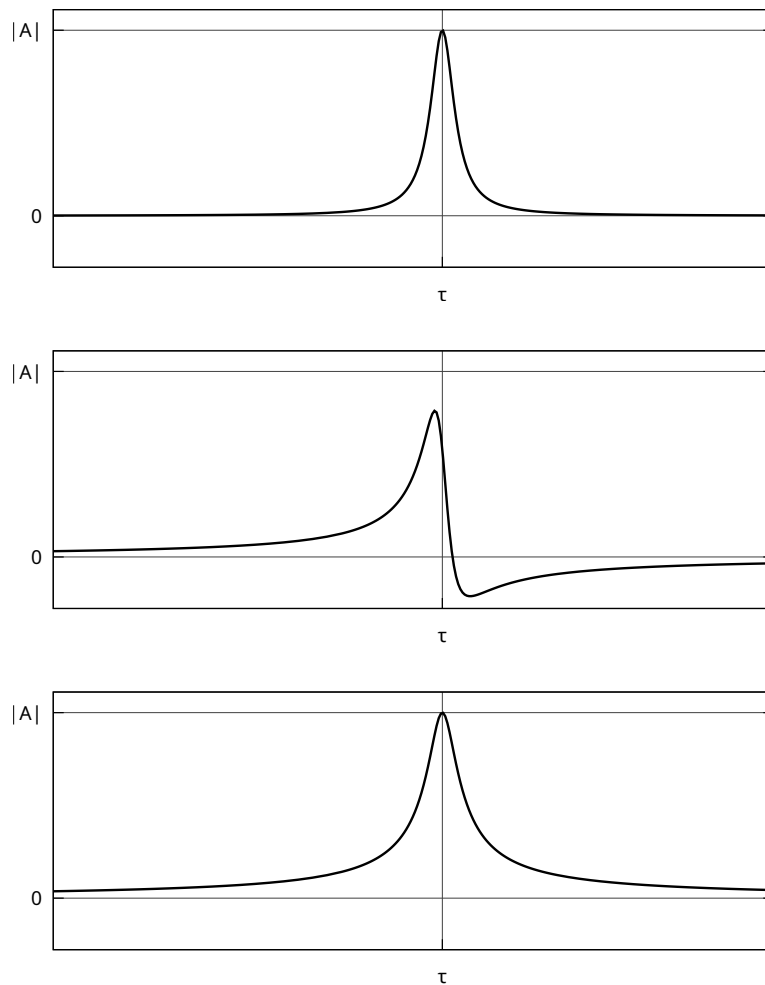


Figura 7.2: No topo, o gráfico de $g(t)$, quando $A \in \mathbb{R}$. No centro, o gráfico de $g(t)$, quando $A = A_R + iA_I$, com $A_R > 0$ e $A_I > 0$. Por fim, o gráfico de valor absoluto do traço analítico, $|G(t)|$.

7.5 Exercícios propostos

Exercício 7.3 Sejam $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que $\mathcal{H}[u * v] = \tilde{u} * v + u * \tilde{v}$.

Exercício 7.4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{i\omega_0 t}$, para $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Compute a transformada de Hilbert de f .

Exercício 7.5 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\tilde{f}(t) dt = 0$.

Exercício 7.6 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função causal, isto é, $c(t) = 0$ para $t < 0$.

(a) Mostre que $\mathcal{H}[\text{Re}(\hat{c})] = -\text{Im}(\hat{c})$ e $\mathcal{H}[\text{Im}(\hat{c})] = \text{Re}(\hat{c})$.

(b) Qual a consequência do resultado acima para o conhecimento de c a partir de $\hat{c}$?

Exercício 7.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o sinal analítico de f , expresso como $F(t) = A(t)e^{i\phi(t)}$, onde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, são a **amplitude** e a **fase instantâneas**, respectivamente. Definindo a **frequência angular instantânea** como $W = \phi'$, mostre que:

(a) $W = (\tilde{f}'f - \tilde{f}f')/A^2$.

(b) Se $f(t) = \text{sinc}(t)$, então $A(t) = |\text{sinc}(t/2)|$, $\phi(t) = \pi t/2$ e $W = \pi/2$.

Exercício 7.8 Considere o problema de enviar dois sinais reais, de banda limitada, através de um único sinal real. Sejam $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\hat{u}(\omega) = \hat{v}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \sigma > 0$. Defina $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $s(t) = u(t)\cos(\omega_0 t) - v(t)\sin(\omega_0 t)$, com $\omega_0 > 0$. Mostre que para recuperar o sinal u a partir de s basta multiplicar $s(t)$ por $2\cos(\omega_0 t)$ e depois passar um filtro passa baixa ideal de banda σ .

Capítulo 8

Transformada de Fourier 2D

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. No domínio de Fourier, represente as variáveis por $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$. A *transformada de Fourier bidimensional* ou *2D*, $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (8.1)$$

com transformada inversa

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (8.2)$$

De forma análoga, no caso de funções escalares definidas no $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}^n$, o par de transformada direta e inversa de Fourier é definido como

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

e

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk.$$

Em Sísmica, é comum que os sinais da variável temporal e das variáveis espaciais sejam opostos na exponencial. Por exemplo, se $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^3$ e $\omega \in \mathbb{R}$, então o par de transformada direta e inversa é usualmente definido como

$$\hat{f}(k, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i(\omega t - k \cdot x)} dt dx$$

e

$$f(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, \omega) e^{i(\omega t - k \cdot x)} d\omega dk.$$

8.1 Propriedades básicas

Muitas das propriedades observadas para a transformada de Fourier 1D se estendem analogamente para a transformada de Fourier 2D.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções que tenham transformada de Fourier 2D e $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **Linearidade:** Se $h(x, y) = af(x, y) + bg(x, y)$ então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = a\hat{f}(k_x, k_y) + b\hat{g}(k_x, k_y).$$

(b) **Reversão de sinal:** Se $h(x, y) = f(-x, y)$ então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = a\hat{f}(-k_x, k_y)$$

e o mesmo vale se a reversão for na variável y .

(c) **Escalamento:** Se $h(x, y) = f(ax, by)$, com $ab \neq 0$, então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = \frac{1}{|ab|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}, \frac{k_y}{b}\right).$$

(d) **Deslocamento:** Se $h(x, y) = f(x - a, y - b)$ então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = e^{-i(ak_x + bk_y)} \hat{f}(k_x, k_y).$$

(e) **Convolução:** Se $h(x, y) = (f * g)(x, y)$, onde

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)g(x - u, y - v) dudv,$$

então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = \hat{f}(k_x, k_y)\hat{g}(k_x, k_y).$$

(f) **Produto:** Se $h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$ então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} (\hat{f} * \hat{g})(k_x, k_y).$$

(g) **Derivação:** Se $h(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ então

$$\hat{h}(k_x, k_y) = (ik_x)\hat{f}(k_x, k_y)$$

e o mesmo vale de forma análoga para a derivada parcial na variável y .

8.2 Casos particulares

Exemplo 8.1 Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ então

$$\begin{aligned} \hat{f}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x) + f_2(y)] e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-ik_x x} dx \right] e^{-ik_y y} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-ik_y y} dy \right] e^{-ik_x x} dx \\ &= \hat{f}_1(k_x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_y y} dy + \hat{f}_2(k_y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x} dx \\ &= 2\pi \hat{f}_1(k_x) \delta(k_y) + 2\pi \hat{f}_2(k_y) \delta(k_x) \\ &= 2\pi \left[\hat{f}_1(k_x) \delta(k_y) + \hat{f}_2(k_y) \delta(k_x) \right]. \end{aligned}$$

Exemplo 8.2 Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ então

$$\begin{aligned}\hat{f}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x) \cdot f_2(y)] e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-ik_x x} dx \right] f_2(y) e^{-ik_y y} dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-ik_x x} dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-ik_y y} dy \right] = \hat{f}_1(k_x) \hat{f}_2(k_y).\end{aligned}$$

Exemplo 8.3 Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $f(x, y) = g(x + y)$ então

$$\begin{aligned}\hat{f}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x + y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x + y) e^{-ik_x x} dx \right] e^{-ik_y y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x y} \hat{g}(k_x) e^{-ik_y y} dy \\ &= \hat{g}(k_x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_y - k_x)y} dy \\ &= 2\pi \hat{g}(k_x) \delta(k_x - k_y).\end{aligned}$$

Por simetria,

$$\hat{f}(k_x, k_y) = 2\pi \hat{g}(k_x) \delta(k_x - k_y) = 2\pi \hat{g}(k_y) \delta(k_x - k_y).$$

Exemplo 8.4 Sejam $a > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi a^2), & r \leq a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. O gráfico de f é um disco de altura $(1/\pi a^2)$ e raio a , centrado na origem. Observe que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= 1, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} f(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)\end{aligned}$$

e

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(0, 0) = \infty.$$

Isto é, a função f converge, no sentido de distribuição, para a [Delta de Dirac 2D](#), quando $a \rightarrow \infty$.

A transformada de Fourier 2D de f é dada por

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

Como f tem simetria radial é mais conveniente reescrever a integral em coordenadas polares. Se $\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ e θ é o ângulo entre os vetores (k_x, k_y) e (x, y) , temos

$$\begin{aligned}\hat{f}(k_x, k_y) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi a^2} \mu(a-r) e^{-i\rho r \cos(\theta)} r d\theta dr \\ &= \int_0^a \frac{r}{\pi a^2} \left[\int_0^{2\pi} e^{-i\rho r \cos(\theta)} d\theta \right] dr \\ &= \int_0^a \frac{r}{\pi a^2} [2\pi J_0(-\rho r)] dr \\ &= \frac{2}{a^2} \int_0^a r J_0(\rho r) dr \\ &= \frac{2}{\rho^2 a^2} \int_0^{\rho a} u J_0(u) du \\ &= \frac{2}{\rho^2 a^2} (\rho a) J_1(\rho a) = 2 \frac{J_1(\rho a)}{\rho a}.\end{aligned}$$

Para detalhes sobre a função de Bessel veja [A.37](#).

Definição 8.1 Seja $\text{jinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\text{jinc}(x) = \begin{cases} 2J_1(x)/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Com esta definição, a função f do exemplo anterior fica

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \text{jinc}(\rho a).$$

Esta função faz o papel da função sinc em 2D. A Figura 8.1 exibe em preto o gráfico da função jinc e, para efeito de comparação, o gráfico da função sinc, em vermelho. Repare que a função jinc tem seus zeros menos adensados quando comparada com a função sinc, além de não estarem distribuídos regularmente.

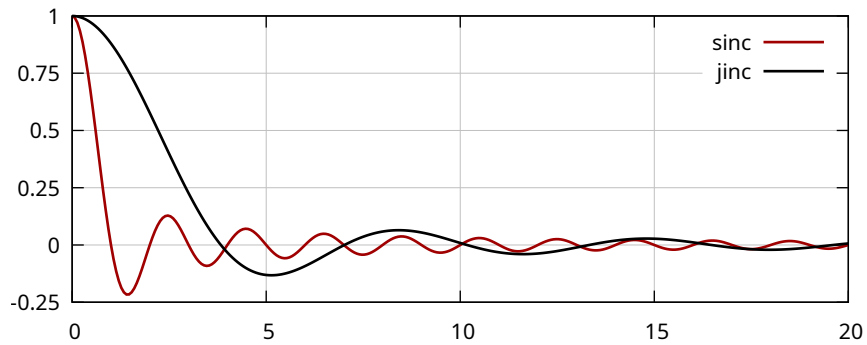


Figura 8.1: Gráficos das funções jinc, em preto, e sinc, em vermelho.

8.3 Exercícios propostos

Exercício 8.1 *Demonstre as propriedades da transformada de Fourier 2D apresentadas na seção 8.1.*

Exercício 8.2 *Compute a transformada de Fourier 2D para as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo.*

(a) $f(x, y) = \delta(x)\delta(y)$.

(b) $f(x, y) = \frac{1}{2}\delta(x)[\delta(y - a) + \delta(y + a)]$.

(c) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/4}$.

(d) $f(x, y) = 1$, para $-1 \leq x, y \leq 1$ e $f(x, y) = 0$, caso contrário.

Exercício 8.3 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com simetria radial, isto é $f(x, y) = g(r)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que se f tem transformada de Fourier, então $\hat{f}$ também tem simetria radial.*

Capítulo 9

Wavelets

9.1 Introdução

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$, é possível escrever

$$x = a + b \quad \text{e} \quad y = a - b,$$

com

$$a = \frac{x + y}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{x - y}{2}.$$

Considere o sinal discreto

$$s = [56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16].$$

Vamos *decompô-lo* em duas partes, uma com as médias (como em a) e outra com as diferenças (como em b), computadas entre elementos consecutivos dois a dois:

$$s = s^3 = a^3 = [56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16]$$

$$s^2 = a^2 = [(56 + 40)/2, (8 + 24)/2, (48 + 48)/2, (40 + 16)/2] = [48, 16, 48, 28]$$

$$b^2 = [(56 - 40)/2, (8 - 24)/2, (48 - 48)/2, (40 - 16)/2] = [8, -8, 0, 12]$$

$$s^1 = a^1 = [(48 + 16)/2, (48 + 28)/2] = [32, 38]$$

$$b^1 = [(48 - 16)/2, (48 - 28)/2] = [16, 10]$$

$$s^0 = a^0 = [(32 + 38)/2] = [35]$$

$$b^0 = [(32 - 38)/2] = [-3]$$

Defina agora o sinal

$$s^D = [a^0; b^0; b^1; b^2] = [35; -3; 16, 10; 8, -8, 0, 12].$$

Em essência, os sinais s^D e s são iguais, no sentido contêm a mesma informação, visto que um pode ser recuperado a partir do outro. De fato, a partir de s^D , o sinal s é reconstruído como

$$s^0 \leftarrow [35] \qquad b^0 = [-3]$$

$$s^1 \leftarrow [35 + (-3), 35 - (-3)] = [32, 38] \qquad b^1 = [16, 10]$$

$$\begin{aligned} s^2 \leftarrow [32 + 16, 32 - 16, 38 + 10, 38 - 10] \\ = [48, 16, 48, 28] \qquad b^2 = [8, -8, 0, 12] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^3 \leftarrow [48 + 8, 48 - 8, 16 + (-8), 16 - (-8), 48 + 0, 48 - 0, 28 + 12, 28 - 12] \\ = [56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16] = s. \end{aligned}$$

Exercício 9.1 Decomponha o sinal $s = [31, 19, 25, 5, 22, 6, 10, -14]$, com acima. 

Exercício 9.2 Determine o sinal s a partir de $s^D = [12; 4; 6, 5; 1, 0, 4, 8]$. 

9.2 Funções de Haar

As funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

são denominadas *função escala de Haar* e *wavelet de Haar*, respectivamente, cujos gráficos estão na figura abaixo.

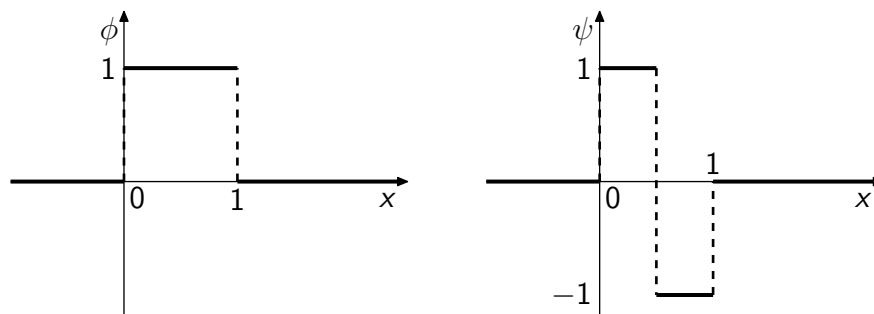


Figura 9.1: À esquerda, gráfico da função ϕ e, à direita, gráfico da função ψ .

Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad \langle \phi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$, defina

$$\phi_{n,j}(x) = \phi(2^n x - j) \quad \text{e} \quad \psi_{n,j}(x) = \psi(2^n x - j).$$

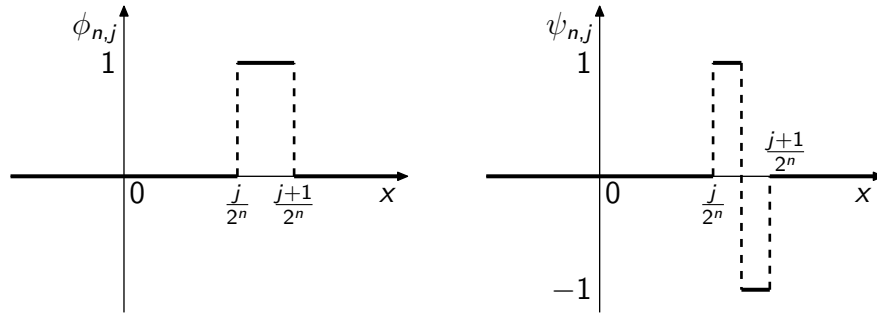


Figura 9.2: À esquerda, gráfico da função $\phi_{n,j}$ e, à direita, gráfico da função $\psi_{n,j}$.

Os gráficos de $\phi_{n,j}$ e $\psi_{n,j}$ estão esboçados na Figura 9.2.

Usando as funções $\phi_{n,j}$ e $\psi_{n,j}$ podemos reinterpretar o que foi feito no exemplo do início do capítulo. Suponha que o sinal discreto $s = [56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16]$ eram amostras da função S dada por

$$\begin{aligned} S(x) \equiv S^3(x) &= a_0^3 \phi(2^3 x - 0) + a_1^3 \phi(2^3 x - 1) + a_2^3 \phi(2^3 x - 2) + a_3^3 \phi(2^3 x - 3) \\ &\quad + a_4^3 \phi(2^3 x - 4) + a_5^3 \phi(2^3 x - 5) + a_6^3 \phi(2^3 x - 6) + a_7^3 \phi(2^3 x - 7) \\ &= 56\phi_{3,0}(x) + 40\phi_{3,1}(x) + 8\phi_{3,2}(x) + 24\phi_{3,3}(x) \\ &\quad + 48\phi_{3,4}(x) + 48\phi_{3,5}(x) + 40\phi_{3,6}(x) + 16\phi_{3,7}(x). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} S^2(x) &= a_0^2 \phi(2^2 x - 0) + a_1^2 \phi(2^2 x - 1) + a_2^2 \phi(2^2 x - 2) + a_3^2 \phi(2^2 x - 3) \\ &= 48\phi_{2,0}(x) + 16\phi_{2,1}(x) + 48\phi_{2,2}(x) + 28\phi_{2,3}(x), \end{aligned}$$

$$S^1(x) = a_0^1 \phi(2^1 x - 0) + a_1^1 \phi(2^1 x - 1) = 32\phi_{1,0}(x) + 38\phi_{1,1}(x)$$

$$S^0(x) = a_0^0 \phi(2^0 x - 0) = 35\phi_{0,0}(x)$$

Na Figura 9.3 estão os gráficos de S^3 , função de maior resolução, S^2 , S^1 e S^0 , função de menor resolução.

Da definição de ϕ e ψ temos

$$\phi(2x) = \frac{\phi(x) + \psi(x)}{2} \quad \text{e} \quad \phi(2x - 1) = \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2}.$$

Com isto, os sinais acima ficam

$$S^0(x) = a_0^0 \phi(x),$$

$$\begin{aligned} S^1(x) &= a_0^1 \phi(2x) + a_1^1 \phi(2x - 1) \\ &= a_0^1 \frac{\phi(x) + \psi(x)}{2} + a_1^1 \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2} \\ &= \frac{a_0^1 + a_1^1}{2} \phi(x) + \frac{a_0^1 - a_1^1}{2} \psi(x) = a_0^0 \phi(x) + b_0^0 \psi(x). \end{aligned}$$

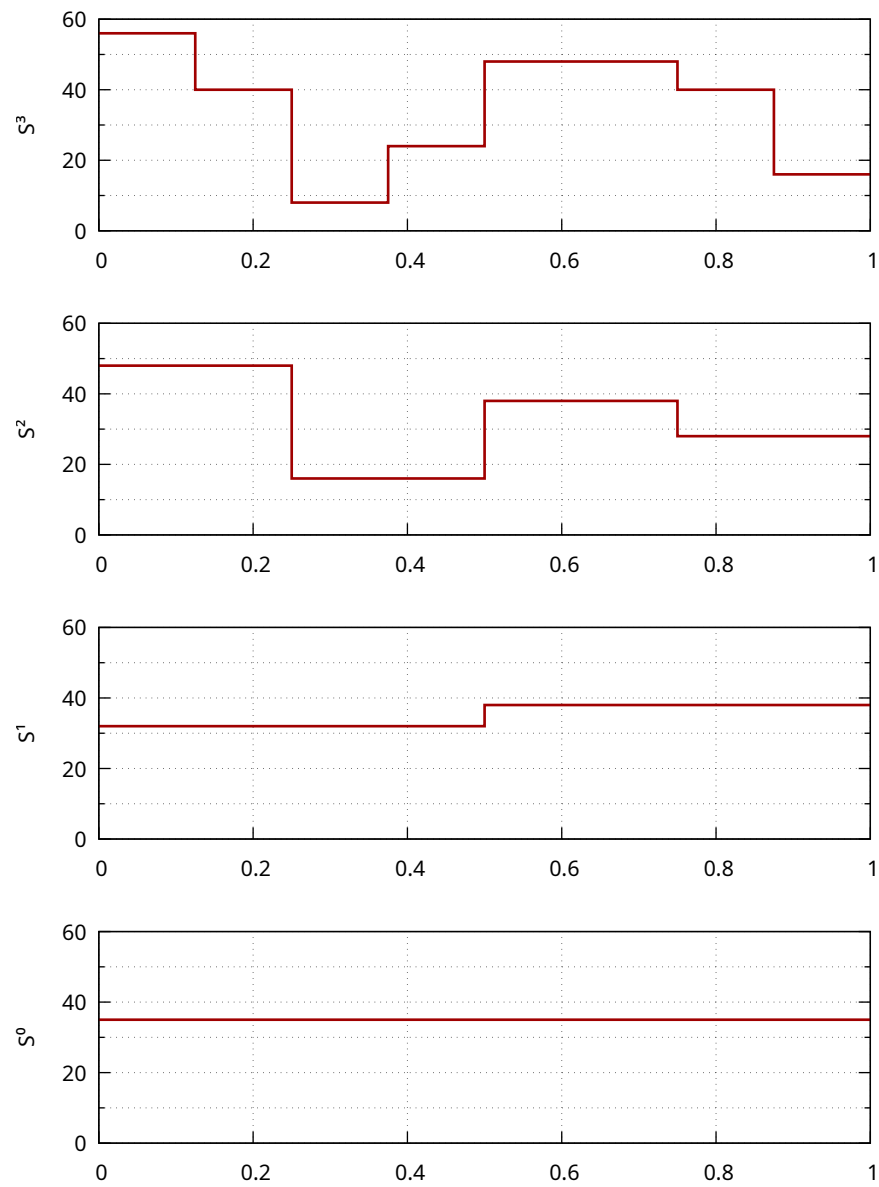


Figura 9.3: Gráficos das funções S^3 , S^2 , S^1 e S^0 , de cima para baixo, respectivamente.

$$\begin{aligned}
S^2(x) &= a_0^2 \phi(4x - 0) + a_1^2 \phi(4x - 1) + a_2^2 \phi(4x - 2) + a_3^2 \phi(4x - 3) \\
&= a_0^2 \frac{\phi(2x) + \psi(2x)}{2} + a_1^2 \frac{\phi(2x) - \psi(2x)}{2} \\
&\quad + a_2^2 \frac{\phi(2x - 1) + \psi(2x - 1)}{2} + a_3^2 \frac{\phi(2x - 1) - \psi(2x - 1)}{2} \\
&= \frac{a_0^2 + a_1^2}{2} \phi(2x) + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2} \psi(2x) + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2} \phi(2x - 1) + \frac{a_2^2 - a_3^2}{2} \psi(2x - 1) \\
&= a_0^1 \phi(2x) + b_0^1 \psi(2x) + a_1^1 \phi(2x - 1) + b_1^1 \psi(2x - 1) \\
&= a_0^1 \frac{\phi(x) + \psi(x)}{2} + b_0^1 \psi(2x) + a_1^1 \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2} + b_1^1 \psi(2x - 1) \\
&= \frac{a_0^1 + a_1^1}{2} \phi(x) + \frac{a_0^1 - a_1^1}{2} \psi(x) + b_0^1 \psi(2x) + b_1^1 \psi(2x - 1) \\
&= a_0^0 \phi(x) + b_0^0 \psi(x) + b_0^1 \psi(2x) + b_1^1 \psi(2x - 1).
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
S^3(x) &= a_0^0 \phi(x) \\
&\quad + b_0^0 \psi(x) \\
&\quad + b_0^1 \psi(2x) + b_1^1 \psi(2x - 1) \\
&\quad + b_0^2 \psi(4x) + b_1^2 \psi(4x - 1) + b_2^2 \psi(4x - 2) + b_3^2 \psi(4x - 3),
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
s(x) &= 35\phi(x) - 3\psi(x) + 16\psi(2x) + 10\psi(2x - 1) \\
&\quad + 8\psi(4x) - 8\psi(4x - 1) + 0\psi(4x - 2) + 12\psi(4x - 3).
\end{aligned}$$

9.3 Decomposição e reconstrução

Seja $s \in \mathbb{R}^m$, $m = 2^N$, $N \in \mathbb{N}$, um sinal discreto.

Algoritmo de decomposição

1. $a^N = s$
2. Para $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$:

$$a_j^n = \frac{a_{2j}^{n+1} + a_{2j+1}^{n+1}}{2} \quad \text{e} \quad b_j^n = \frac{a_{2j}^{n+1} - a_{2j+1}^{n+1}}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

3. $s^D = [a_0^0; b^0; b^1; \dots; b^{N-1}]$.

Algoritmo de reconstrução

1. $s^D = [a_0^0; b^0; b^1; \dots; b^{N-1}]$.

2. Para $n = 1, 2, \dots, N$:

$$a_j^n = \begin{cases} a_{j/2}^{n-1} + b_{j/2}^{n-1}, & j \text{ par}, \\ a_{(j-1)/2}^{n-1} - b_{(j-1)/2}^{n-1}, & j \text{ ímpar}, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

3. $s = a^N$

O sinal s , visto como uma função definida no intervalo $[0, 1]$ é escrito como

$$s(x) = a_0^0 \phi(x) + \sum_{n=0}^{N-1} \Psi^n(x),$$

onde

$$\Psi^n(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j^n \psi_{n,j}(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j^n \psi(2^n x - j).$$

Definindo os espaços vetoriais

$$\mathbb{V}_n = \text{span}\{\phi_{n,0}, \dots, \phi_{n,2^n-1}\} = \left\{ \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j \phi(2^n - j) \mid c_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, m,$$

$$\mathbb{W}_n = \text{span}\{\psi_{n,0}, \dots, \psi_{n,2^n-1}\} = \left\{ \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j \psi(2^n - j) \mid c_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

temos as propriedades

- (i) $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \dots \subset \mathbb{V}_m$,
- (ii) $\mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{V}_n \oplus \mathbb{W}_n = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{W}_n$,
- (iii) $\phi \in \mathbb{V}_0$, $\Psi^n \in \mathbb{W}_n$ e $\phi + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi^k \in \mathbb{V}_n$.

Este sistema de espaços gerados por $\phi_{n,j}$ e $\psi_{n,j}$ pode ser utilizado para filtrar e compactar sinais.

Algoritmo de Filtragem e compactação

1. Decomponha o sinal s com o *algoritmo de decomposição*.
2. Para *filtrar*, escolha um nível $0 \leq n_0 \leq N-1$ e defina $b^n = 0$, para $n \geq n_0$.
3. Para *compactar*, escolha uma porcentagem p , ordene em ordem decrescente os valores de $|b_j^n|$ e redefina $b_{n,j} = 0$ para os p menores.

4. Reconstrua o sinal com o *algoritmo de reconstrução*, obtendo o sinal s^R .

O erro quadrático médio é

$$\frac{\|s - s^R\|_2}{\|s^R\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} |s_k - s_k^R|^2}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} |s_k^R|^2}}.$$

9.4 Wavelets de Daubechies

As funções de Haar analisadas têm suporte compacto, geram um sistema ortogonal, mas são descontínuas. Ingrid Daubechies (1954–) foi a pioneira em mostrar que existem wavelets com suporte compacto, contínuas e que geram um sistema ortogonal (Daubechies, 1988). A Figura 9.4 exibe um exemplo de função escala e wavelet de Daubechies. Estas funções são contruídas como limites de processos iterativos.

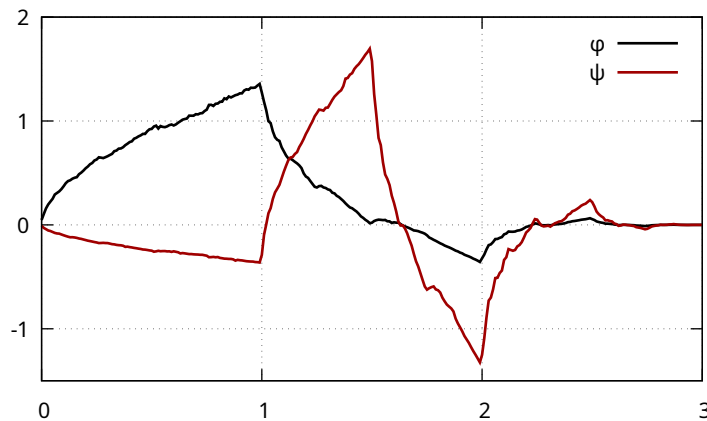


Figura 9.4: Função de escala (em preto) e wavelet de Daubechies (em vermelho), conhecidas como DB4.

Exemplo 9.1 Considere o sinal $s = [56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16]$ usado anteriormente. Já vimos que $s^D = [35; -3; 16, 10; 8, -8, 0, 12]$. Vamos compactá-lo em 70%, ou seja, preservar apenas os 30% maiores valores de $|b_j^n|$. Dos sete valores, 30% correspondem aos dois maiores valores a serem preservados. Como esses valores são, em ordem decrescente, 16, 12, 10, 8, 8, 3, 0, apenas os valores 16 e 12 serão mantidos, enquanto que os restantes são zerados. Assim, $s^C = [35; 0; 16, 0; 0, 0, 0, 12]$. Ao aplicar o algoritmo de reconstrução, obtemos $s^R = [51, 51, 19, 19, 35, 35, 47, 23]$. Na Figura 9.5 exibimos os gráficos do sinal original e de sua reconstrução após a compactação. 

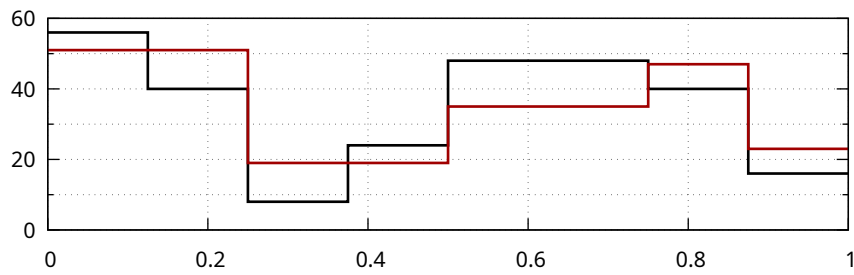


Figura 9.5: Em preto, o gráfico do sinal s e, em vermelho, o gráfico do sinal s^R .

Exemplo 9.2 Considere o sinal $s = [-1, 0, 3, 5, 6, 4, 2, 0, 0, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1] \in \mathbb{R}^{16}$. Aplicando o algoritmo de decomposição, obtemos

$$s^D = [2.3750; 0; -0.625, -0.125; -2.25, 2.00, -1.25, 1.00; \\ -0.5, -1, 1, 1, -1, -0.5, 0.5, 0.5].$$

Vamos compactar este sinal em 50%, zerando os sete menores valores de $|b_j^n|$, preservando os oito maiores valores. Desta forma,

$$s^C = [2.3750; 0; 0, 0; -2.25, 2, -1.25, 1; 0, -1, 1, 1, -1, 0, 0, 0].$$

Ao reconstruir o sinal, obtemos

$$s^R = [0.125, 0.125, 3.625, 5.625, 5.375, 3.375, 1.375, -0.625, 0.125, 2.125, \\ 3.625, 3.625, 3.375, 3.375, 1.375, 1.375].$$

Na Figura 9.6 exibimos os gráficos do sinal original e de sua reconstrução após a compactação. 

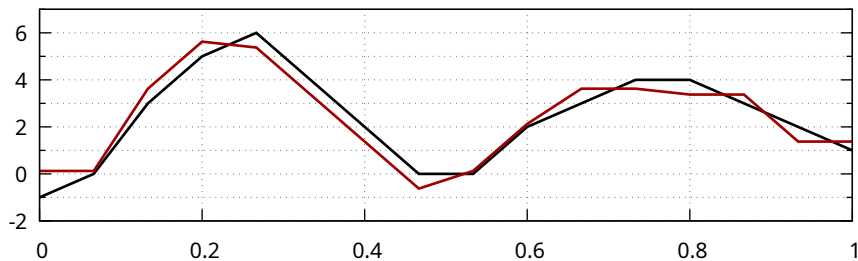


Figura 9.6: Em preto, o gráfico do sinal s e, em vermelho, o gráfico do sinal s^R .

Exemplo 9.3 Neste exemplo, comparamos a filtragem e a compressão de sinais usando wavelets e usando a transformada de Fourier. Considere o sinal da Figura 9.7, com 256 amostras.

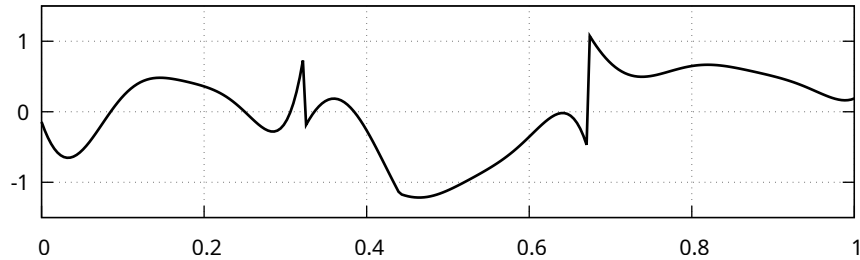


Figura 9.7: Sinal com 256 amostras.

A Figura 9.8 exibe o sinal filtrado, utilizando com a wavelet de Haar, tomando $n_0 = 6$, isto significa que dos 256 coeficientes em sua decomposição por wavelets, apenas 64 foram preservados. Nesta filtragem o erro quadrático médio foi de 0.11. A Figura 9.9 exibe o sinal filtrado pela aplicação do filtro passa baixa de Gabor com frequência de corte $\omega_q/4$. Neste caso, o erro quadrático médio foi de 0.19. Perceba as que variações mais abruptas foram perdidas.

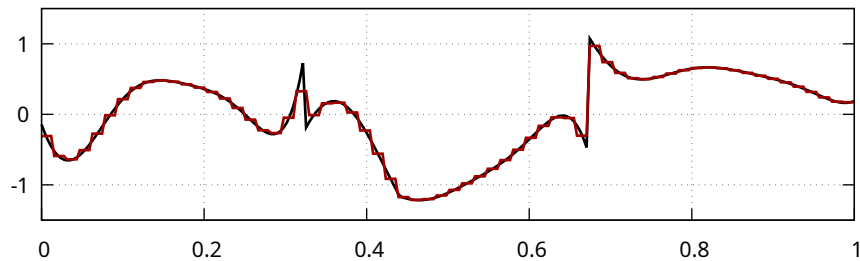


Figura 9.8: Sinal filtrado com a wavelet de Haar e $n_0 = 6$.

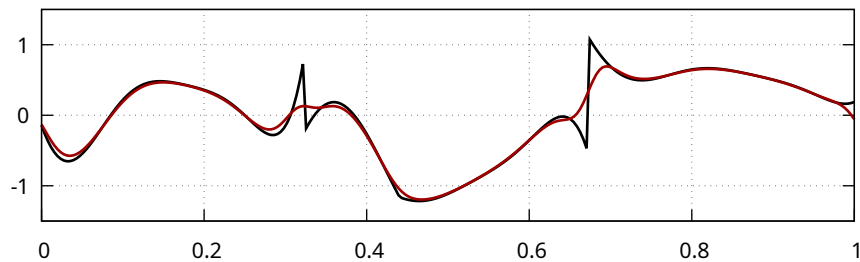


Figura 9.9: Sinal filtrado com filtro passa baixa de Gabor e $\omega_c = \omega_q/4$.

A Figura 9.10 exibe o sinal compactado com wavelets, preservando 95% de sua energia. Isto significou que apenas 29 coeficientes foram preservados. Aqui o erro quadrático médio foi de 0.13. Por fim, a Figura 9.11 exibe o sinal compactado com Fourier, preservando 95% de sua energia. Isto significou que apenas 8 coeficientes foram preservados. Neste caso, o erro quadrático médio foi de 0.29.

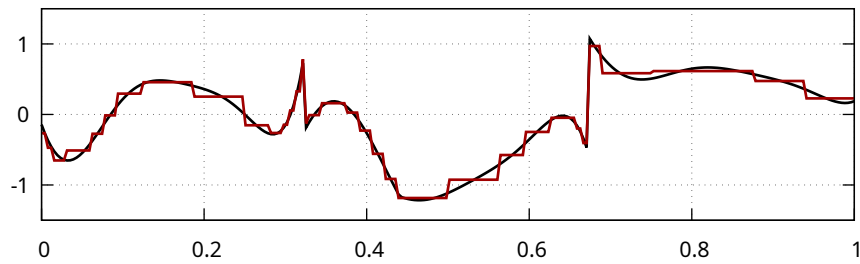


Figura 9.10: Sinal compactado em 95% de sua energia com wavelets.

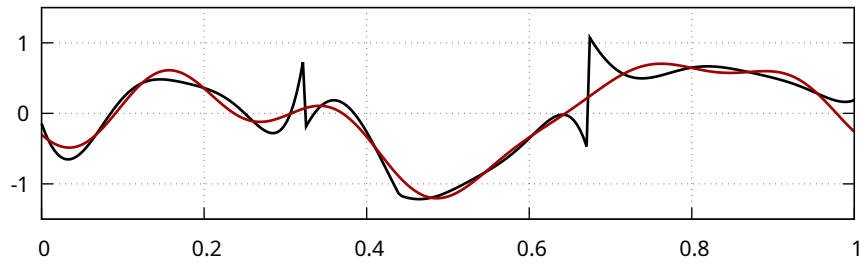


Figura 9.11: Sinal compactado em 95% de sua energia com Fourier.

9.5 Exercícios propostos

Exercício 9.3 Considere o sinal discreto $s = [-1, 2, 1, 4, -3, -2, 0, 1]$. Utilize os algoritmos de decomposição e reconstrução com a wavelet de Haar para compactar o sinal s em 90% de sua energia. Exiba os gráficos de s e sua compactação e analise o resultado.

Bibliografia

- Atkinson, K. e Han, W. (2009). *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Springer, 3ª edição.
- Blahut, R. E. (2009). *Theory of Remote Image Formation*. Cambridge University Press.
- Briggs, W. L. e Henson, V. E. (1995). *The DFT: An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Chapman, C. (2004). *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*. Cambridge University Press.
- Chu, E. (2008). *Discrete and Continuous Fourier Transforms: Analysis, Applications and Fast Algorithms*. CRC Press.
- Damelin, S. B. e Miller, Jr, W. (2011). *The Mathematics of Signal Processing*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, XLI:909–996.
- de Figueiredo, D. G. (1987). *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2ª edição.
- Pujol, J. (2003). *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press.
- Riley, K. F., Hobson, M. P., e Bence, S. J. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 3ª edição.

Apêndice A

Detalhes dos capítulos

Para maior fluidez do texto, apresentamos aqui o desenvolvimento mais detalhado de contas, exemplos e exercícios, bem como de algumas passagens de demonstrações.

A.1 Resolução do exercício 1.1.

(a) Tome $f(t) = \sin(2t)$, com período $T_f = \pi$, e $g(t) = \cos(3t)$, com período $T_g = 2\pi/3$. Neste caso, $(f + g)$ é periódica com período $T = 2\pi$. (b) Tome $f(t) = \sin(t)$, com período $T_f = 2\pi$, e $g(t) = \cos(\sqrt{2}t)$, com período $T_g = 2\pi/\sqrt{2}$. Neste caso, não existe T que seja múltiplo inteiro de T_f e T_g , dado que a razão entre eles é um número irracional. Isto não contradiz o que foi dito no início da seção, pois naquele caso a hipótese era que as duas funções tinham o mesmo período.

A.2 Resolução do exercício 1.2.

$$(f_1 + f_2)(t + mT_1) = f_1(t + mT_1) + f_2(t + nT_2) = f_1(t) + f_2(t) = (f_1 + f_2)(t).$$

A.3 Resolução do exercício 1.3.

Para qualquer valor T real fixo, $f(t + T) = c = f(t)$. Logo, f é uma função periódica e qualquer valor T fixo é período de f . Entretanto, o ínfimo do conjunto dos períodos positivos, $\{T \in \mathbb{R} \mid T > 0\}$, é zero. Logo, f não tem período fundamental.

A.4 Ortogonalidade das funções $\cos(\omega_n t)$ e $\sin(\omega_n t)$ (p. 3).

Observe as seguinte identidades

$$\begin{aligned}\omega_n \frac{T}{2} &= \frac{2\pi n}{T} \frac{T}{2} = n\pi, \\ \omega_m \pm \omega_n &= \frac{2\pi m}{T} \pm \frac{2\pi n}{T} = \omega_{(m \pm n)}.\end{aligned}$$

No que se segue, computamos todos os possíveis produtos internos cruzados.

$$\langle 1, \cos(\omega_n t) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) dt = -\frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0,$$

$$\langle 1, \sin(\omega_n t) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) dt = -\frac{1}{\omega_n} \cos(\omega_n t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_m t), \cos(\omega_n t) \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_m t) \cos(\omega_n t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_{(m+n)} t) + \cos(\omega_{(m-n)} t) dt \\ &= \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega_{(m+n)} t)}{m+n} + \frac{\sin(\omega_{(m-n)} t)}{m-n} \right]_{t=-T/2}^{T/2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sin(\omega_m t), \sin(\omega_n t) \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_m t) \sin(\omega_n t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_{(m-n)} t) - \cos(\omega_{(m+n)} t) dt \\ &= \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega_{(m-n)} t)}{m-n} + \frac{\sin(\omega_{(m+n)} t)}{m+n} \right]_{t=-T/2}^{T/2} = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_m t), \sin(\omega_n t) \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_m t) \sin(\omega_n t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_{(m+n)} t) - \sin(\omega_{(m-n)} t) dt \\ &= \frac{T}{2\pi} \left[-\frac{\cos(\omega_{(m+n)} t)}{m+n} + \frac{\cos(\omega_{(m-n)} t)}{m-n} \right]_{t=-T/2}^{T/2} = 0. \end{aligned}$$

A.5 Norma das funções $\cos(\omega_n t)$ e $\sin(\omega_n t)$ (p. 3).

As normas de $\cos(\omega_n t)$ e $\sin(\omega_n t)$, para $n > 0$, são:

$$\begin{aligned} \|\cos(\omega_n t)\|^2 &= \langle \cos(\omega_n t), \cos(\omega_n t) \rangle \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega_n t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega_n t)]^2 + [\sin(\omega_n t)]^2 dt = \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

O mesmo vale para $\sin(\omega_n t)$, ou seja

$$\|\cos(\omega_n t)\| = \|\sin(\omega_n t)\| = \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

Para $n = 0$, $\cos(\omega_n t) = 1$ e sua norma é $\sqrt{T}$.

A.6 Demonstração do Teorema 1.1 (Teorema de Parseval).

Observe que

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|^2 &= \langle f - f_N, f - f_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f_N, f \rangle - \langle f, f_N \rangle + \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\langle f, f_N \rangle + \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\left\langle f, \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} \right\rangle + \langle f_N, f_N \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Observe também que

$$\langle f, f_N \rangle = \left\langle f, \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} \right\rangle = \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n \langle f, e^{i\omega_n t} \rangle = T \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n c_n = T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2,$$

e

$$\langle f_N, f_N \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\omega_k t}, \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} \right\rangle = T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2,$$

onde usamos o resultado do exercício 1.5. Assim, de (A.1), temos

$$\|f\|^2 - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \rightarrow 0,$$

o que prova o teorema.

A.7 Extensão ímpar para $f(t) = t$ (p. 6)

Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com período $2L$, tal que $f_1(t) = t$, para $t \in (-L, L]$. Então

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_1(t) \sin(\omega_n t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}.$$

Logo, para $t \in (0, L)$,

$$f_1(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right).$$

A.8 Extensão par para $f(t) = t$ (p. 6).

Seja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica, com período $2L$, tal que $f_2(t) = |t|$, se $t \in [-L, L]$. Então

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-L}^L |t| dt = 2 \frac{2}{2L} \int_0^L t dt = L,$$

e

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-L}^L |t| \cos(\omega_n t) dt = \frac{4}{2L} \int_0^L t \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt = \frac{2L}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1).$$

Repare que se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, então $b_n = 0$. Se $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, então

$$b_k = -\frac{4L}{[(2k-1)\pi]^2}.$$

Assim,

$$f_2(t) \sim \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{L}\right).$$

A.9 Extensão ímpar, contínua, para $f(t) = t$ (p. 6).

Seja $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica, com período $T = 4L$, tal que

$$f_3(t) = \begin{cases} -2L - t, & -2L < t \leq -L, \\ t, & -L < t \leq L, \\ 2L - t, & L < t \leq 2L \end{cases}$$

Como f_3 é ímpar $a_n = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-2L}^{2L} f_3(t) \sin(\omega_n t) dt = 2 \frac{2}{4L} \int_0^{2L} f_3(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{4L}\right) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt + \frac{1}{L} \int_L^{2L} (2L - t) \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt + \frac{1}{L} \int_{-L}^0 -u \sin\left(\frac{n\pi(u+2L)}{2L}\right) du \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt + \frac{1}{L} \int_{-L}^0 -u \sin\left(\frac{n\pi u}{2L}\right) \cos(n\pi) du \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt - \frac{1}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) \cos(n\pi) dt \\ &= \frac{1 - \cos(n\pi)}{L} \int_0^L t \sin\left(\frac{n\pi t}{2L}\right) dt = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{L} \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), & n = 2k - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_3(t) \sim \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2L}\right).$$

A.10 Resolução do exercício 2.1.

Para $\omega = 0$ temos que

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-a}^a 1 dt = 2a.$$

Para $\omega \neq 0$,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}] = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega a).$$

Logo,

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2a, & \omega = 0, \\ \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega a), & \omega \neq 0. \end{cases}$$

Para que $\hat{f}$ seja $\mathcal{L}^1$, a integral imprópria de $|\hat{f}|$ deve existir. Entretanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|\operatorname{sen}(\omega a)|}{|\omega|} d\omega &> \int_0^{\infty} \frac{2|\operatorname{sen}(\omega a)|}{\omega} d\omega \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi/a}^{(k+1)\pi/a} \frac{|\operatorname{sen}(\omega a)|}{\omega} d\omega \\ &> 2a \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi/a}^{(k+1)\pi/a} \frac{|\operatorname{sen}(\omega a)|}{(k+1)\pi} d\omega \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{(k+1)\pi} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} = \infty \end{aligned}$$

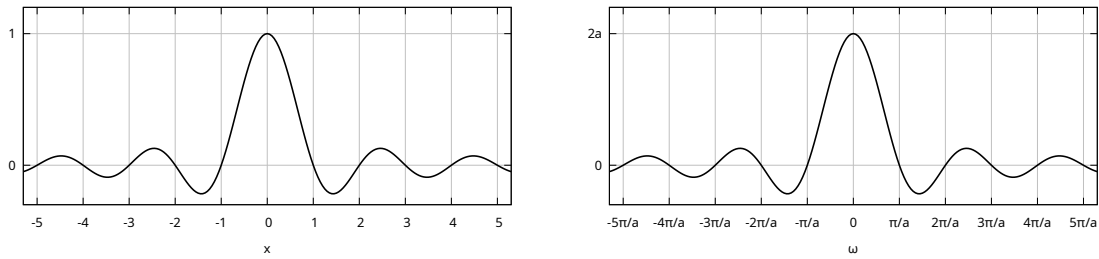
A.11 Resolução do exercício 2.2.

Se $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, então

$$\operatorname{sinc}(n) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\pi} = 1 = \operatorname{sinc}(0).$$

A.12 Resolução do exercício 2.3.


À esquerda, o gráfico da função sinc. À direita, o gráfico de $\hat{f}$.

A.13 Resolução do exercício 2.4.

Veja que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{b}{\pi}.$$

Para $t \neq 0$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{it} \right] = \frac{b}{\pi} \text{sinc}(bt/\pi).$$

Logo, como $\text{sinc}(0) = 1$,

$$f(t) = \frac{b}{\pi} \text{sinc}(bt/\pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A.14 Resolução do exercício 2.5.

Se f é par, então $f(-t) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(-t) e^{i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Claramente, $\hat{f}$ é par e real.

A.15 Resolução do exercício 2.6.

Se f é par, então $f(-t) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= -\int_0^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= -\int_0^{\infty} f(t)[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] dt = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.\end{aligned}$$

Claramente, $\hat{f}$ é ímpar e imaginária pura.

A.16 Resolução do exercício 2.7.

Sabemos que

$$e^{-i\omega t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^m t^m}{m!}.$$

Logo, supondo que a integração e a série podem ser intercambiadas,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^m t^m}{m!} \right] dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} t^m f(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^m}{m!} a_m.\end{aligned}$$

A.17 Resolução do exercício 2.8.

Usando o resultado do 2.4, com $b = \pi$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt.$$

Pelo Teorema de Plancherel (exercício proposto),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\text{sinc}}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\omega = 1.$$

A.18 Resolução do exercício 3.1.

Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}[f * (ag + bh)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[ag(t - \tau) + bh(t - \tau)] d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau + b \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &= a(f * g)(t) + b(f * h)(t).\end{aligned}$$

Veja também que

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \\
 &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(t - \theta)g(\theta) d\theta \quad (\theta = t - \tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \theta)g(\theta) d\theta = (g * f)(t).
 \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
 [f * (g * h)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(g * h)(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau - u)h(u) du \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau - u) d\tau \right] h(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t - u)h(u) du = [(f * g) * h](t).
 \end{aligned}$$

A.19 Resolução do exercício 3.2.

Observe que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 1 - |t| < 0, \\ 1/2, & 1 - |t| = 0, \\ 1, & 1 - |t| > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ 1/2, & |t| = 1, \\ 1, & |t| < 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 (f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t - \tau) d\tau = \int_{-1}^1 f(t - \tau) d\tau \\
 &= \begin{cases} 0, & t + 1 < -1, \\ \int_{-1}^{t+1} d\tau, & -1 \leq t + 1 < 1, \\ \int_{t-1}^1 d\tau, & 1 \leq t + 1 < 3, \\ 0, & t + 1 \geq 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < -2, \\ t + 2, & -2 \leq t < 0, \\ 2 - t, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases} \\
 &= \max 0, 2 - |t| = r(2 - |t|).
 \end{aligned}$$

A.20 Resolução do exercício 3.3.

Vamos demonstrar esta proposição pelo princípio da indução finita. Para $n = 0$, $g_0(t) = f(t)$. Por outro lado, $t^0 f(t)/0! = f(t)$, verificando assim a tese, neste caso.

Suponhamos que para $k \geq 0$, seja verdadeiro que $g_k(t) = t^k f(t)/k!$. Veja que

$$\begin{aligned} g_{k+1}(t) &= (f * g_k)(t) = f(t) * (t^k f(t)/k!) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^k f(\tau)}{k!} f(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k e^{-a\tau} e^{-a(t-\tau)} \mu(\tau) \mu(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{e^{-at}}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \mu(\tau) \mu(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Observe que $\mu(\tau)\mu(t - \tau) = 1$, apenas se $0 \leq \tau \leq t$. Logo, se $t < 0$, esse produto é identicamente nulo. Assim,

$$g_{k+1}(t) = \frac{e^{-at}}{k!} \mu(t) \int_0^t \tau^k d\tau = \frac{e^{-at}}{(k+1)!} t^{k+1} = t^{(k+1)} f(t)/(k+1)!.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, fica demonstrada a tese.

A.21 Resolução do exercício 4.1.

(a) Como s tem é de banda limitada, pelo Teorema de Shannon, $s(t)$ pode ser escrita como

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_n}{\Delta t} \right),$$

para $0 < \Delta t < \pi/\Omega$. Com isso, se $t_n = n\Delta t$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_n}{\Delta t} \right) \right] \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} s(m\Delta t) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_m}{\Delta t} \right) \right] dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_n}{\Delta t} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_m}{\Delta t} \right) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \cdot \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\tau) \operatorname{sinc} \left(\tau - \frac{(t_m - t_n)}{\Delta t} \right) d\tau \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \cdot \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\tau) \operatorname{sinc}(\tau - (m - n)) d\tau \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \cdot \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\tau) \operatorname{sinc}((m - n) - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \cdot \Delta t (\operatorname{sinc} * \operatorname{sinc})(m - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) s(m\Delta t) \cdot \Delta t \operatorname{sinc}(m - n). \end{aligned}$$

Acima, usamos que a função sinc é par e que $\operatorname{sinc} * \operatorname{sinc} = \operatorname{sinc}$ (Exemplo 3.3). Para concluir, resta observar que $\operatorname{sinc}(m - n) = 0$, se $m \neq n$, e $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Disto, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t)^2.$$

(b)

$$\begin{aligned}\hat{s}(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) \mathcal{F} \left[\text{sinc} \left(\frac{t - t_n}{\Delta t} \right) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) e^{-i\omega t_n} \mathcal{F}[\text{sinc}](\omega \Delta t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n\Delta t) e^{-i\omega n \Delta t},\end{aligned}$$

uma vez que (Exercício 2.4)

$$\mathcal{F}[\text{sinc}](\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| \geq \pi. \end{cases}$$

 e, neste caso, $\omega \Delta t < \pi$.

A.22 Resolução do exercício 4.2.

(a) $\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega a} \hat{x}(\omega)$. Como h e x tem a mesma banda, o intervalo máximo de amostragem é $\Delta t_{\max} = \pi/\Omega_x$.

(b) $\hat{g}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega)$. Logo, $\hat{g}(\omega) = 0$ se $|\omega| > \max\{\Omega_x, \Omega_y\}$. Portanto, $\Delta t_{\max} = \pi/\max\{\Omega_x, \Omega_y\}$.

A.23 Resolução do exercício 4.3.

Defina $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + \lambda)$. Com isto, $\hat{g}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$, além disso $g(t) = e^{-i\lambda t} f(t)$. Pelo Teorema de Shannon, se $t_k = t_0 + k\Delta t$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\Delta t < \pi/\Omega$,

$$e^{-i\lambda t} f(t) = g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t_k) \text{sinc} \left(\frac{t - t_k}{\Delta t} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\lambda t_k} f(t_k) \text{sinc} \left(\frac{t - t_k}{\Delta t} \right),$$

ou

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda(t-t_k)} f(t_k) \text{sinc} \left(\frac{t - t_k}{\Delta t} \right).$$

A.24 Resolução do exercício 5.1.

Se $A = \frac{1}{N} \mathbb{M}_n \overline{\mathbb{M}}_N$, então

$$a_{jj} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & W_N^j & W_N^{2j} & \dots & W_N^{j(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^{-j} \\ W_N^{-2j} \\ \vdots \\ W_N^{-j(N-1)} \end{bmatrix} = 1,$$

e, para $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
 Na_{jk} &= \begin{bmatrix} 1 & W_N^j & W_N^{2j} & \dots & W_N^{j(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^{-k} \\ W_N^{-2k} \\ \vdots \\ W_N^{-k(N-1)} \end{bmatrix} \\
 &= 1 + W_N^{j-k} + W_N^{2(j-k)} + W_N^{3(j-k)} + \dots + W_N^{(N-1)(j-k)} = \frac{1 - W_N^{N(j-k)}}{1 - W_N^{(j-k)}} = 0.
 \end{aligned}$$

Logo, $A = I$ e $\frac{1}{N}\overline{M}_N = M_N^{-1}$.

A.25 Resolução do exercício 5.2.

Para $W_N = \exp(2\pi i/N)$ e $j = 0$, temos

$$\check{f}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_j W_N^{-0 \cdot k} = \sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Para $j \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \check{f}_j &= \sum_{k=1}^{N-1} f_j W_N^{-jk} = \sum_{k=0}^{N-1} k W_N^{-jk} \\
 &= a_j + 2a_j^2 + 3a_j^3 + \dots + (N-1)a_j^{N-1} \quad (a_j = W_N^{-j}) \\
 &= a_j[1 + 2a_j + 3a_j^2 + \dots + (N-1)a_j^{N-2}] \\
 &= a_j \frac{d}{da_j} [a_j + a_j^2 + a_j^3 + \dots + a_j^{N-1}] = a_j \frac{d}{da_j} \left[\frac{a_j - a_j^N}{1 - a_j} \right] \\
 &= a_j \left[\frac{(1 - Na_j^{N-1})(1 - a_j) + (a_j - a_j^N)}{(1 - a_j)^2} \right] \quad (a_j^N = 1) \\
 &= -N \frac{(1 - a_j)}{(1 - a_j)^2} = \frac{N}{a_j - 1}.
 \end{aligned}$$

A.26 Resolução do exercício 5.3.

Do enunciado, tiramos que $t_0 = -2$, $\Delta t = 1$ e $N = 4$. Com isso $\omega_q = \pi/\Delta t = \pi$, $\Delta\omega = 2\omega_q/N = \pi/2$ e $\omega_k = k\Delta\omega = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$, com a ressalva que para $k \geq N/2$, $\omega_k \equiv \omega_k - 2\omega_q$, resultando em $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \pi/2$, $\omega_2 = \pi \equiv \pi - 2\pi = -\pi$ e $\omega_3 = 3\pi/2 \equiv 3\pi/2 - 2\pi = -\pi/2$. Já sabemos que a transformada de Fourier de f é $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} \exp(-\omega^2/4)$. Logo, temos

$$\begin{aligned}
 F &= [f(-2), f(-1), f(0), f(1)]^T \approx [0.018316, 0.367879, 1.000000, 0.367879]^T, \\
 \hat{F} &= [\hat{f}(-\pi), \hat{f}(-\pi/2), \hat{f}(0), \hat{f}(\pi/2)]^T \approx [0.1503, 0.9565, 1.7725, 0.9565]^T.
 \end{aligned}$$

Como $N = 4$ e a matrix $\mathbb{M}_N$ depende apenas de N , podemos utilizar a matriz computada no exemplo 5.1. Assim,

$$\check{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.018316 \\ 0.367879 \\ 1.000000 \\ 0.367879 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7541 \\ -0.9817 \\ 0.2826 \\ -0.9817 \end{bmatrix}$$

Para comparar com o valor da transformada contínua devemos lembrar que a metade posterior do vetor corresponde às frequências negativas, ou seja,

$$\check{F} = [0.2826, -0.9817, 1.7541, -0.9817]^T.$$

Lembre que

$$\hat{f}_k \approx \Delta t e^{-i\omega_k t_0} \check{f}_k = e^{-i(-\pi + k\pi/2)(-2)} \check{f}_k = (-1)^k \check{f}_k.$$

Logo,

$$\hat{F} \approx [0.2826, 0.9817, 1.7541, 0.9817]^T.$$

Com apenas 4 amostras, o resultado é razoável, apesar da primeira amostra ter sido pior estimada.

A.27 Resolução do exercício 5.4.

Veremos que

$$H^C = F *_c G = \text{DFT}^{-1} [\check{F} \cdot \check{G}].$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} h_k^c &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \check{f}_m W_N^{jm} \right] \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \check{g}_n W_N^{(k-j)n} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \check{f}_m W_N^{jm} \right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} \check{g}_n W_N^{kn} W_N^{-jn} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \check{g}_n W_N^{kn} \cdot \left[\sum_{m=0}^{N-1} \check{f}_m W_N^{j(m-n)} \right] \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \check{g}_n W_N^{kn} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \check{f}_m W_N^{j(m-n)} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \check{g}_n W_N^{kn} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \check{f}_m \sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(m-n)} \right]. \end{aligned}$$

Agora lembre que $\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(m-n)} = 0$, se $m \neq n$ e $\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(m-n)} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$, quando $m = n$ (demonstrado em A.24). Assim,

$$h_k^c = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \check{f}_n \check{g}_n W_N^{kn} = \text{DFT}^{-1} [\check{f}_n \cdot \check{g}_n].$$

Portanto,

$$\check{H}^c = \check{F} \cdot \check{G}.$$

A.28 Resolução do exercício 5.5.

A DFT de s é

$$\check{s} = [2, 2.71 - 5.95i, -5 + 5i, 1.29 - 3.95i, -8, 1.29 + 3.95i, -5 - 5i, 2.71 + 5.95i].$$

Logo, $\|\check{s}\|_2 = 16.97$ e $E = 0.9\|\check{s}\|_2 = 15.27$. Observe que

$$|\check{s}| = [2, 6.54, 7.07, 4.16, 8, 4.16, 7.07, 6.53].$$

Portanto, seus elementos em ordem decrescente são:

$$|\check{s}_4| \geq |\check{s}_2| \geq |\check{s}_6| \geq |\check{s}_1| \geq |\check{s}_7| \geq |\check{s}_3| \geq |\check{s}_5| \geq |\check{s}_0|.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \sqrt{|\check{s}_4|^2} &= 8.00 < E, \\ \sqrt{|\check{s}_4|^2 + |\check{s}_2|^2} &= 10.68 < E, \\ \sqrt{|\check{s}_4|^2 + |\check{s}_2|^2 + |\check{s}_6|^2} &= 12.81 < E, \\ \sqrt{|\check{s}_4|^2 + |\check{s}_2|^2 + |\check{s}_6|^2 + |\check{s}_1|^2} &= 14.38 < E, \\ \sqrt{|\check{s}_4|^2 + |\check{s}_2|^2 + |\check{s}_6|^2 + |\check{s}_1|^2 + |\check{s}_7|^2} &= 15.80 \geq E. \end{aligned}$$

Logo,

$$\check{u} = [0, 2.71 - 5.95i, -5 + 5i, 0, -8, 0, -5 - 5i, 2.71 + 5.95i].$$

Invertendo a DFT, temos

$$u = [-1.57, 1.28, 1.74, 2.82, -2.93, -1.78, -1.24, 1.68].$$

Na Figura A.1 vemos o sinal original (em preto) e o sinal após a compactação (em cereja). A compressão foi de aproximadamente 37.5% e o erro quadrático médio foi de 37%.

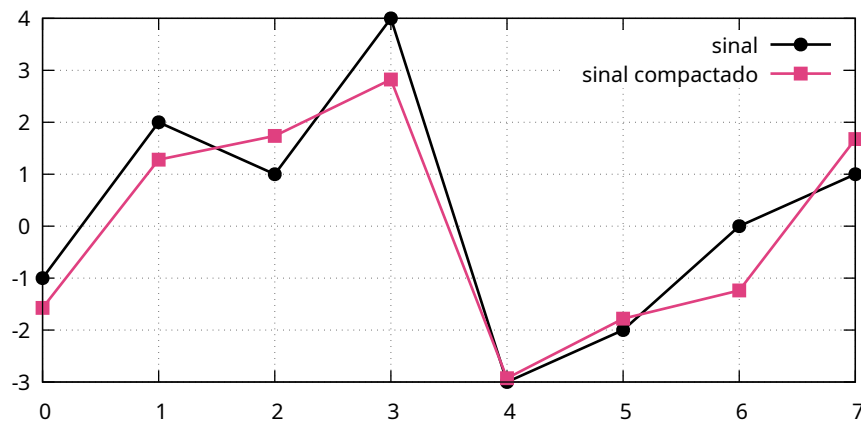


Figura A.1: Comparação entre sinal original e sinal compactado.

A.29 Linearidade e invariância temporal de um filtro convolucional (p. 44).

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então

$$H[f + g](t) = (h * (f + g))(t) = (h * f)(t) + (h * g)(t) = H[f](t) + H[g](t).$$

Da mesma forma,

$$H[af](t) = h(t) * (af(t)) = a(h * f)(t) = aH[f](t).$$

E, por fim,

$$H[f(t - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - a)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(t - a - u) du = (h * f)(t - a).$$

A.30 Código Octave para produzir a Figura 6.8.

Abaixo segue um bloco de código em Octave para produzir a imagem da transformada de Fourier com janela que aparece no rodapé da Figura 6.8. Com o que foi computado neste bloco também é possível produzir os dois gráficos iniciais da mesma figura (tente fazê-lo).

```
clear

f = @(t) sin(10*t)+sin(20*t); # Função f
N = 512;                      # Número de amostras
t = linspace(0,13,N)';        # Malha no tempo
dt = t(2) - t(1);             # Intervalo de amostragem

wq = pi/dt;                   # Frequência de Nyquist
w = [-ceil((N-1)/2):floor((N-1)/2)]'* dw; # Malha em frequência
```

```

tau=(0:.2:12)';                                # Malha em  $\tau$ 
ntau = length(tau);

c = 2;
g = @(x) exp(-4*x.^2/c^2);                      # Filtro passa baixa de Gabor

FTW = zeros(ntau,N);                            # Matriz para guardar TF com janela
ff = f(t);                                       # Vetor de amostras  $\{f(t_j)\}$ 
F = fftshift(fft(ff));                          # DFT de  $\{f(t_j)\}$ 

for it=1:ntau;                                  # Loop em  $\tau$ 
    yy = ff.*g(t-tau(it));                      #  $f(t) \cdot g(t-\tau)$ 
    Y = fft(yy);                                # DFT
    FTW(it,:) = abs(dt*fftshift(Y))';
end

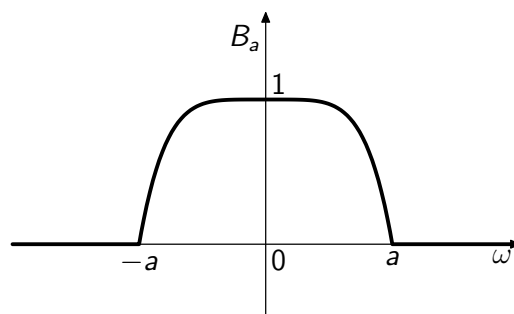
Iw = (150:(N-150+1));                          # Subintervalos para os gráficos
It = 6:ntau;
ww = w(Iw);
tt = tau(It);
FTW = FTW(It,Iw);

imagesc(ww,tt,FTW);                            # Imagem da TF com janela

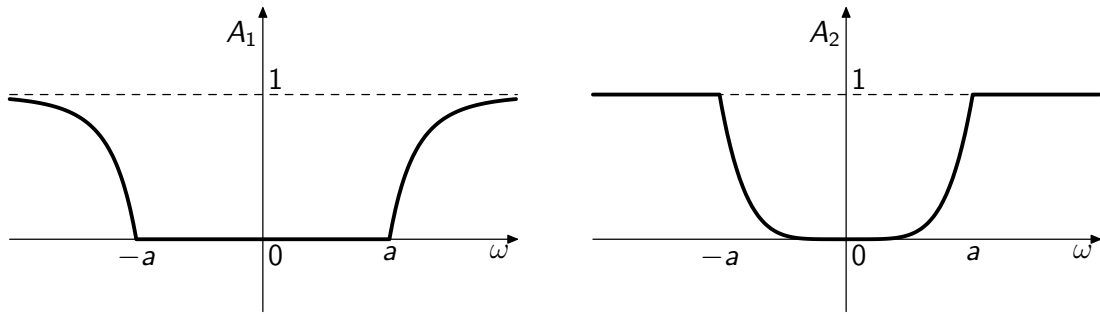
```

A.31 Resolução do exercício 6.1.

Para o filtro A_1 , perceba que se $|\omega| \geq a$, então $(1/|\omega|) \leq 1/a$ e portanto $0 < A_1(\omega) = B_{1/a}(1/\omega) \leq 1$. Para $0 < |\omega| \leq a$, então $(1/|\omega|) > (1/a)$ e portanto $A_1(\omega) = B_{1/a}(1/\omega) = 0$. Para $|\omega| \rightarrow \infty$, $(1/\omega) \rightarrow 0$, logo $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} A_1(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} B_{1/a}(\omega) = 1$. Se o gráfico de B_a for



então os gráficos de A_1 e A_2 serão, respectivamente:



Os filtros A_1 e A_2 são do tipo passa alta. O filtro A_1 elimina totalmente o conteúdo de frequência abaixo de a e a partir daí aumenta gradualmente o conteúdo tendendo a manter igual no limite. O filtro A_2 mantém o conteúdo de frequência a partir de a e diminui gradualmente o conteúdo até eliminar totalmente na frequência nula.

A.32 Complexo conjugado da transformada de Fourier de função real (p. 57).

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt = \hat{f}(-\omega).$$

A.33 Transformada de Fourier da função do Exemplo 7.4.

Sejam $a > 0$ e $g(t) = \frac{a}{2}e^{-a|t|}$. Sabemos que $\hat{g}(\omega) = \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} = f(\omega)$. Logo,

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[\hat{g}(t)] = 2\pi g(-\omega) = 2\pi \frac{a}{2}e^{-a|-\omega|} = a\pi e^{-a|\omega|}.$$

A.34 Resolução do exercício 7.1.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\omega) \mu(\pi - |\omega|) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^{i\omega t} d\omega - \int_0^{\pi} e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1 - e^{-i\pi t} - e^{i\pi t} + 1}{it} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi t} [2 - 2\cos(\pi t)] = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi t} = \frac{2}{\pi t} \operatorname{sen}(\pi t/2)^2. \end{aligned}$$

Assim, $S(t) = \operatorname{sinc}(t) + \frac{2i}{\pi t} \operatorname{sen}(\pi t/2)^2$ é o sinal analítico de $\operatorname{sinc}(t)$. Na Figura A.2 vemos os gráficos de f , $\tilde{f}$ e a região cinza, delimitada pelos gráficos de $|F(t)|$ e $-|F(t)|$.

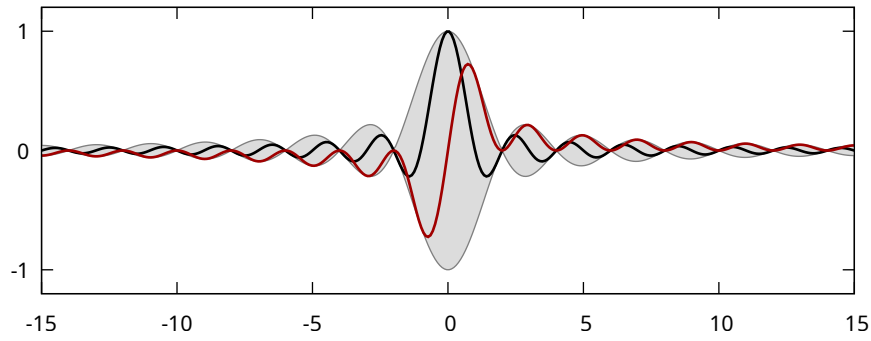


Figura A.2: Gráficos de f , em preto, e $\tilde{f}$, em vermelho. A região em cinza está compreendida entre os gráficos de F e $-F$.

A.35 Resolução do exercício 7.2.

(a)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(-T)}{t + T} dT \quad (T = -\tau) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T)}{t + T} dT = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T)}{-t - T} dT = -\tilde{f}(-t)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(-T)}{t + T} dT \quad (T = -\tau) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(T)}{t + T} dT = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T)}{-t - T} dT = \tilde{f}(-t)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[f'](t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t - \tau)^2} d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \right] = \frac{d}{dt} \mathcal{H}[f](t).\end{aligned}$$

A.36 Demonstração das propriedades de transformada de Hilbert (p. 60).

Primeiro, observe que

$$\mathcal{F}[\tilde{f}](\omega) = \mathcal{F} \left[\mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(t)] \right] = -i \operatorname{sign}(\omega) \hat{f}(\omega).$$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2[f](t) &= \mathcal{H}[\tilde{f}](t) = \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega) \mathcal{F}[\tilde{f}](\omega)] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sign}(\omega)(-i \operatorname{sign}(\omega))\hat{f}(\omega)] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[-\hat{f}(\omega)] = -f(t).
\end{aligned}$$

$$(b) \mathcal{H}[F](t) = \mathcal{H}[f(t) + i\tilde{f}(t)] = \tilde{f}(t) - if(t) = -i[f(t) + i\tilde{f}(t)] = -iF(t).$$

(c) $\hat{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t) + i\tilde{f}](\omega) = \hat{f}(\omega) + \operatorname{sign}(\omega)\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega)[1 + \operatorname{sign}(\omega)]$. Observe que

$$1 + \operatorname{sign}(\omega) = 2\mu(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ 1, & \omega = 0, \\ 2, & \omega > 0. \end{cases}$$

Assim, $\hat{F}(\omega) = 2\mu(\omega)\hat{f}(\omega)$ ou $F(t) = \mathcal{F}^{-1}[2\mu(\omega)\hat{f}(\omega)]$.

A.37 Propriedades da função de Bessel (p. 66).

A função de Bessel de primeiro tipo e ordem $n \in \mathbb{Z}$ é dada por

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen}(\theta)) d\theta$$

e satisfaz

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x).$$

Uma propriedade útil é

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

Para $n = 0$, pode-se mostrar que

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen}(\theta)} d\theta.$$

Como referência, consulte [Riley et al. \(2006\)](#).

A.38 Resolução do Exercício 9.1.

$$s^3 = [31, 19, 25, 5, 22, 6, 10, -14]$$

$$s^2 = [(31 + 19)/2, (25 + 5)/2, (22 + 6)/2, (10 + (-14))/2] = [25, 15, 14, -2]$$

$$b^2 = [(31 - 19)/2, (25 - 5)/2, (22 - 6)/2, (10 - (-14))/2] = [6, 10, 8, 12]$$

$$s^1 = [(25 + 15)/2, (14 + (-2))/2] = [20, 6]$$

$$b^1 = [(25 - 15)/2, (14 - (-2))/2] = [5, 8]$$

$$s^0 = [(20 + 6)/2] = [13]$$

$$b^0 = [(20 - 6)/2] = [7]$$

Logo

$$s^D = [13; 7; 5, 8; 6, 10, 8, 12].$$

A.39 Resolução do Exercício 9.2.

$$s^0 \leftarrow [12] \quad b^0 = [4]$$

$$s^1 \leftarrow [12 + 4, 12 - 4] = [16, 8] \quad b^1 = [6, 5]$$

$$\begin{aligned} s^2 \leftarrow [12 + 6, 12 - 6, 8 + 5, 8 - 5] \\ = [18, 6, 13, 3] \end{aligned} \quad b^2 = [1, 0, 4, 8]$$

$$\begin{aligned} s^3 \leftarrow [18 + 1, 18 - 1, 6 + 0, 6 - 0, 13 + 4, 13 - 4, 3 + 8, 3 - 8] \\ = [19, 17, 6, 6, 17, 9, 11, -5] = s. \end{aligned}$$

A.40 Reconstrução do sinal do Exemplo 9.1.

$$a^0 = [35]$$

$$b^0 = [0]$$

$$a^1 = [35 + 0, 35 - 0] = [35, 35]$$

$$b^1 = [16, 0]$$

$$a^2 = [35 + 16, 35 - 16, 35 + 0, 35 - 0] = [51, 19, 35, 35]$$

$$b^2 = [0, 0, 0, 12]$$

$$a^3 = [51, 51, 19, 19, 35, 35, 35 + 12, 35 - 12] = [51, 51, 19, 19, 35, 35, 47, 23]$$

Logo, o sinal compactado é $s^R = [51, 51, 19, 19, 35, 35, 47, 23]$.

A.41 Reconstrução do sinal do Exemplo 9.2.

Iniciando pela decomposição de s temos

$$\begin{aligned} a^4 &= [-1, 0, 3, 5, 6, 4, 2, 0, 0, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1], \\ a^3 &= [-0.5, 4.0, 5.0, 1.0, 1.0, 3.5, 3.5, 1.5], \\ b^3 &= [-0.5, -1.0, 1.0, 1.0, -1.0, -0.5, 0.5, 0.5], \\ a^2 &= [1.75, 3.00, 2.25, 2.50], \\ b^2 &= [-2.25, 2.00, -1.25, 1.00], \\ a^1 &= [2.375, 2.375], \\ b^1 &= [-0.625, -0.125], \\ a^0 &= [2.375], \\ b^0 &= [0]. \end{aligned}$$

Assim,

$$s^D = [2.3750; 0; -0.625, -0.125; -2.25, 2.00, -1.25, 1.00; \\ -0.5, -1, 1, 1, -1, -0.5, 0.5, 0.5]$$

e a versão compactada, preservando os oito maiores valores é

$$s^C = [2.3750; 0; 0, 0; -2.25, 2, -1.25, 1; 0, -1, 1, 1, -1, 0, 0, 0].$$

A aplicação do algoritmo de reconstrução produz

$$\begin{aligned} a^0 &= [2.375], \\ b^0 &= [0], \\ a^1 &= [2.375, 2.375], \\ b^1 &= [0, 0], \\ a^2 &= [2.375, 2.375, 2.375, 2.375], \\ b^2 &= [-2.250, 2.000, -1.250, 1.000], \\ a^3 &= [0.125, 4.625, 4.375, 0.375, 1.125, 3.625, 3.375, 1.375], \\ b^3 &= [0.000, -1.000, 1.000, 1.000, -1.000, 0.000, 0.000, 0.000], \\ a^4 &= [0.125, 0.125, 3.625, 5.625, 5.375, 3.375, 1.375, -0.625, 0.125, 2.125, \\ &\quad 3.625, 3.625, 3.375, 3.375, 1.375, 1.375]. \end{aligned}$$

Apêndice B

Referência rápida

B.1 Definições e Identidades

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{p. 9}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{p. 9}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad \text{p. 12}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} d\omega \quad \text{p. 15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad \text{p. 18}$$

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{p. 57}$$

$$F(t) = \text{Re}[F(t)] + i\text{Im}[F(t)] = f(t) + i\tilde{f}(t) \quad \text{p. 58}$$

$$\tilde{f}(t) = \mathcal{H}[f](t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau = \mathcal{F}^{-1}[-i \text{sign}(\omega) \hat{f}(\omega)] \quad \text{p. 58}$$

B.2 Transformadas de Fourier

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	
$f(at), a \neq 0$	$(1/ a)\hat{f}(\omega/a)$	p. 18
$f(t - a)$	$e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$	p. 18
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$	p. 12
$t^n f(t)$	$i^n \hat{f}^{(n)}(\omega)$	p. 18
$[f * g](t)$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$	p. 21
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}[\hat{f} * \hat{g}](\omega)$	p. 21
$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$	p. 18
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	p. 11
$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{ a } \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$	p. 11
e^{iat}	$2\pi\delta(\omega - a)$	p. 17
$\text{sen}(at)$	$i\pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$	p. 17
$\cos(at)$	$\pi[\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$	p. 17
$s(t)$	$2/(i\omega)$	p. 17
$\mu(t)$	$1/(i\omega) + \pi\delta(\omega)$	p. 18
$\mu(a - t)$	$2a \text{sinc}(\omega a/\pi)$	p. 10
$\text{sinc}(t)$	$\mu(\pi - \omega)$	p. 18

Índice

- aliasing, 31
- coeficiente de Fourier, 3
- convolução, 20
 - cíclica, 37
 - discreta, 36
- deconvolução, 21
- delta de Dirac, 14
 - analítica, 59
 - banda limitada, de, 45
- DFT, ver transformada de Fourier
- discreta
- distribuição, 12
 - regular, 13
 - singular, 14
- extensão analítica, 61
- fenômeno de Gibbs, 46
- FFT, ver transformada de Fourier
- rápida
- filtro, 44
 - Blackmann, 48
 - convolucional, 44
 - Gabor, 48
 - Hamming, 48
 - Hann, 48
 - passa baixa, 45
 - retangular, 45
 - trapezoidal, 46
 - triangular, 48
- frequência de Nyquist, 24
- função
 - banda limitada, de, 23
 - degrau unitário, ver Heaviside, de
 - Heaviside, de, 15
 - integrável, 10
 - jinc, 67
 - periódica, 1
 - quadrado integrável, 10
 - rampa unitária, 15
 - seno cardinal, 10
 - sinal, 16
- jinc, ver função jinc
- Nyquist, ver frequência de Nyquist 24
- período, 1
 - fundamental, 2
- polinômio trigonométrico, 3
 - forma complexa, 4
- produto interno, 3
- pulso de
 - Gabor, 19
 - Rayleigh, 19
 - Ricker, 19
- sinal
 - analítico, 57
 - energia finita, de, 10
 - estável, 10
- sinc, ver função seno cardinal
- série de Fourier, 1
- teorema
 - Dirichlet, de, 5
 - Plancherel, de, 19
 - Shannon, de, 23
- transformada de Fourier
 - 2D, 64
 - contínua, 9
 - discreta, 28, 29

rápida, 35	delta de Dirac, 59
transformada de Hilbert, 58	wavelet, 69