Coletânea de exercícios de Análise Numérica I

1 de Setembro de 2021

1 Revisão de Álgebra Linear

1. Prove que $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{3}n(n+1/2)(n+1)$. (Dica: use o Princípio da Indução Finita.)

2. Prove que $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que A é não-singular se e somente se o sistema linear $Ax = 0$ só admite a solução trivial.

4. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que o produto AB é não-singular se e somente se A e B são não-singulares.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Mostre que posto$(A) = n$ se e somente se $A^T A$ é não-singular.

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Prove que posto$(A) = n$ se e somente se $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

7. Pegue seu livro de Álgebra Linear e relembre o Teorema do Núcleo e da Imagem. Faça alguns exercícios sobre isso.

8. Mostre que $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$.

9. Prove que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, além disso, se a matriz for simétrica então eles são ortogonais.

10. Se A é uma matriz simétrica, mostre que λ autovalor de A é real.

11. Seja A uma matriz simétrica. Mostre que:

    (a) Se v é autovetor de A, então $\bar{v}$ também é autovetor.

    (b) Se λ é autovalor de A, é possível encontrar autovetor associado real.

12. Seja $A = vu^T$, para $v, u \in \mathbb{R}^n$. Qual o posto de A? Encontre todos os autovalores e autovetores A.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $b = Ax$ pode ser escrito como combinação linear das colunas de A. Quais são os coeficientes dessa combinação linear? (Dica: considere A particionada como $A = [A_1\ A_2\ \cdots A_n]$, onde A_j é a j-ésima coluna de A.)

2 Fundamentos

1. Se A é uma matriz de ordem n e $x \in \mathbb{R}^n$, usando o Octave, meça o tempo do produto Ax e do produto $A^T x$, para diferentes valores de n. Qual o maior valor de n que seu computador suportou? Analise os dados que você obteve e tente explicá-los.
   Dica: para medir o tempo, use as funções `tic` e `toc`.

2. Prove que
$$\int_0^{n-1} x\, dx \le \sum_{j=1}^{n-1} j \le \int_0^{n} x\, dx.$$
   Com isso, deduza que
$$\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) \approx \frac{n^2}{2}.$$
   Prove que o mesmo vale para $\sum_{j=1}^{n} j$.

3. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e $b \in \mathbb{R}^n$, mostre que

   (a) $\nabla\left(x^T A x\right) = Ax + A^T x$,

   (b) $\nabla\left(x^T b\right) = b$.

3 Sistemas Triângulares

1. Escreva dois algoritmos para encontrar a solução de um sistema triângular superior, um que acesse os elementos da matriz por linhas e outro que acesse-os por colunas. Em cada algoritmo, explicite-o em termos de operações elementares. Conte o número de operações.

2. Prove que a inversa de uma matriz triângular superior (inferior) é uma matriz triângular superior (inferior).

3. Prove que o produto de duas matrizes triângulares superiores (inferiores) é uma matriz triângular superior (inferior).

4. Prove que a inversa de uma matriz triângular superior (inferior) com diagonal unitária é uma matriz triângular superior (inferior) com diagonal unitária.

5. Prove que o produto de duas matrizes triângulares superiores (inferiores) com diagonal unitária é uma matriz triângular superior (inferior) com diagonal unitária.

4 Decomposição de Cholesky

1. Seja $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $M^T M$ é uma matriz simétrica semi-definida positiva. Em que situação $M^T M$ será definida positiva?

2. Se A é simétrica e definida positva (s.d.p.), mostre que os elementos da diagonal de A são estritamente positivos.

3. Se A é uma matriz simétrica e definida positiva, mostre que todos os autovalores de A são estritamente positivos.

4. Se A é s.d.p., particionada como
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
onde $A_{11} \in \mathbb{R}^{j\times j}$ e $A_{22} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Mostre que A_{11} e A_{22} são s.d.p.

5. Se A é s.d.p., mostre que $\det(A) > 0$.

6. Escreva dois algoritmos para a decomposição de Cholesky, um na forma produto-externo e outro na forma produto-interno. (Dica: particione as matrizes A e G.)

7. Conte o número de operações dos algoritmos que você escreveu.

8. Escreva dois algoritmos para a decomposição de Cholesky, um na forma produto-externo e outro na forma produto-interno, de tal maneira que o fator de Cholesky seja armazenado em cima da matriz original.

9. Prove que a decomposição de Cholesky é única.

5 Matrizes Ortogonais

Matriz ortogonal Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal se $Q^T Q = I$.

Norma matricial induzida Se $\|\cdot\|$ é uma norma vetorial, pode-se definir uma norma matricial induzida pela norma vetorial como:
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Número de condição Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O número de condição de A, $\kappa(A)$, é definido por $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. O número de condição de uma matriz quantifica o quão numericamente sensível é um sistema linear com a matriz A.

1. Em $\mathbb{R}^2$ represente graficamente os conjuntos:
   $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_x = 1\}$ e $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$.

2. Prove que $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ e que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

3. Prove que $\kappa(A) \geq 1$.

4. Se Q é uma matriz ortogonal ($Q^T Q = QQ^T = I$), mostre que $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo x. Mostre que $\|Q\|_2 = 1$.

5. Mostre que se Q e W são matrizes ortogonais então:
   (a) Q^{-1} é matriz ortogonal.
   (b) QW é matriz ortogonal.
   (c) $\det(Q) = \pm 1$.
   (d) $\|Q\|_2 = 1$, $\|Q^{-1}\|_2 = 1$ e $\kappa_2(A) = 1$.

6. Se $u \in \mathbb{R}^n$ é unitário, mostre que a matriz $Q = I - 2uu^T$ é simétrica e ortogonal.

7. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Explique como construir uma transformação ortogonal Q, usando reflexões, tal que $Qx = y$.

8. Seja $Q = (I - \gamma uu^T) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Explique como computar o produto Qx sem formar explicitamente a matriz Q. Quantas operações são necessárias para realizar esse produto?

9. Encontre um refletor Q que mapeie $x = [-4 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 2 \ \ -3]^T$ num vetor da forma $[\sigma \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^T$. Escreva Q de duas formas, como $Q = I - \gamma uu^T$ e como uma matriz explicitamente computada. Compute Qx, para Q representada dessas duas formas.

6 Decomposição QR e Quadrados mínimos

Espaço coluna e Núcleo Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. O *espaço coluna* de A é $\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax\}$. O *núcleo* de A é $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Teoremas

- $\dim\{\mathcal{R}(A)\} + \dim\{\mathcal{N}(A)\} = n$
- $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) = \mathbb{R}^m$
- $\|u+v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \iff u \perp v$

Projeção P é uma *matriz de projeção* se $P^2 = P$ e $P = P^T$.

Sistema normal Se x_* é a solução de quadrados mínimos de um sistema inconsistente $Ax = b$, então $A^TAx_* = A^Tb$, conhecido como *sistema normal*. Com efeito, b pode ser escrito como $b = \hat{b} + \tilde{b}$, com $\hat{b} \in \mathcal{R}(A)$ e $\tilde{b} \in \mathcal{N}(A^T)$. Observe então que

$$\begin{aligned}
\|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - \hat{b}) - \tilde{b}\|_2^2 \\
&= \|Ax - \hat{b}\|_2^2 + \|\tilde{b}\|_2^2 \qquad \text{(Por quê?)} \\
&\geq \|\tilde{b}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como $\hat{b} \in \mathcal{R}(A)$, exite x_* tal que $Ax_* = \hat{b}$. Logo

$$\|Ax_* - b\|_2^2 = \min_x \|Ax - b\|_2^2 = \|\tilde{b}\|_2^2.$$

Por fim, se $Ax_* = \hat{b}$, então

$$A^TAx_* = A^T\hat{b} = A^T(\hat{b} + \tilde{b}) = A^Tb,$$

dado que $\tilde{b} \in \mathcal{N}(A^T)$.

1. Considere os dados tabelados abaixo.

t_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_1	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4

(a) Faça um gráfico (manualmente), marcando os pontos da tabela. Usando uma régua esboce a reta que, em sua opinião, melhor aproximaria esses pontos.

(b) Construa um sistema sobredeterminado, obtido pela imposição de que os dados tabelados sejam interpolados por uma reta.

(c) Utilizando o MATLAB ou o Octave, "resolva" o sistema linear $Ax = b$ do ítem anterior, utilizando o operador "\" ($x = A\backslash b$). Esse operador é utilizado para resolver sistemas lineares, e produz automaticamente a solução de quadrados mínimos no caso de sistemas sobredeterminados.

(d) Sobre o gráfico construído no ítem (a), desenhe também a reta computada no ítem anterior.

2. Pegue seu livro de Álgebra Linear e relembre o Teorema do Núcleo e da Imagem. Faça alguns exercícios sobre isso.

3. Construa algoritmos para calcular a decomposição QR com base nos particionamentos sugeridos abaixo.

(a)

$$A = [\hat{A} \mid a] \;=\; [\hat{Q} \mid q] \left[\begin{array}{c|c} \hat{R} & r \\ \hline 0 & \rho \end{array}\right] = QR.$$

(b)

$$A = [a \mid \hat{A}] \;=\; [q \mid \hat{Q}] \left[\begin{array}{c|c} \rho & r^T \\ \hline 0 & \hat{R} \end{array}\right] = QR.$$

4. Implemente no MATLAB ou Octave os dois algoritmos que você construiu no exercício anterior. Aplique-os no cálculo da decomposição QR das matrizes abaixo:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-9} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -14 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 10^{-8} & 2 \end{bmatrix}$

5. Mostre que os Algoritmos de Gram-Schmidt Clássico e Modificado, em teoria, produzem os mesmos vetores.

6. Seja $S = \text{span}\{(1,1,1,1)^T, (2,2,0,0)^T, (0,-2,3,1)^T\}$.

(a) Obtenha uma base ortonormal para S.

(b) Obtenha uma base ortonormal para $S^\perp = \{v \mid \langle v, x\rangle = 0, \forall x \in S\}$.

(c) Encontre o vetor de S mais próximo de $(0,1,1,-3)^T$.

7. Considere $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sejam $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ os fatores da decomposição QR de A. Utilizando esses fatores, construa (a) a matriz de projeção ortogonal no espaço coluna de A, e (b) a matriz de projeção ortogonal no núcleo de A^T.

7 Autovalores e autovetores

Espectro de A O espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, é o conjunto de seus autovalores, i.é,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ é autovalor de A}\}.$$

1. Seja A particionada com
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$
com A_{ii} matrizes quadradas. Mostre que os autovalores de A são tanto os autovalores de A_{11} quanto os de A_{22}, isto é $\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22})$. Quais seriam os autovetores de A?

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Aplique o métododa potência partindo de $q_0 = [a,\ b]^T$, com $a \neq b$. Explique porque a sequência gerada não converge.

3. Aplique os métodos da potência e da potência inversa para estimar os autovetores associados ao maior e ao menor autovalores em módulo das matrizes abaixo. Como critério de parada, utilize $|\sigma_k - \sigma_{k-1}| \leq 10^{-3}$. Verifique se o último q_k obtido de fato é uma boa aproximação para o autovetor procurado. Explique o que aconteceu em cada caso.

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\rho \in \mathbb{C}$. Mostre que se v é autovetor de A associado ao autovalor λ, então v também é autovetor de $(A - \rho I)$ com autovalor $\lambda - \rho$.

8 Decomposição SVD

1. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto n, mostre que $\|A(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = 1$.

2. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $m = \dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A))$.

3. Prove que $\mathcal{N}(A^TA) = \mathcal{N}(A)$.

4. Prove que $\text{posto}(A^TA) = \text{posto}(A) = \text{posto}(A^T) = \text{posto}(AA^T)$.

5. Prove que se v é autovetor de A^TA, associado a um autovalor não nulo λ, então Av é autovalor de AA^T associado ao mesmo autovalor.

6. Prove que A^TA e AA^T tem os mesmo autovalores não nulos, contando as multiplicidades.

7. Prove que se v_1 e v_2 são autovetores ortogonais de A^TA então Av_1 e Av_2 também são ortogonais.

8. Por construção, use os exercícios (2)–(7) desta seção para demonstrar a existência da Decomposição SVD.

9. Seja $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simples, com autovetores linearmente independentes $v_1, v_2, \cdots, v_n$, associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Suponha que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são não nulos e que $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ são nulos. Mostre que $\mathcal{R}(B) = \text{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ e, com isso, que $\text{posto}(A) = k$.

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $\text{posto}(A) = k$. Prove que A pode ser decomposta em

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T,$$

onde $\hat{U} \in \mathbb{R}^{m\times k}$, com colunas ortonormais, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, com colunas ortonormais, e $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$.

11. Mostre que os valores singulares de AB e $B^T A^T$ são os mesmos.

12. Calcule (na mão) a decomposição SVD das matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são ortogonalmente equivalentes se $A = QBQ^T$, para alguma Q ortogonal. É verdade que A e B são ortogonalmente equivalentes se e somente se elas têm os mesmos valores singulares?

14. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Prove que $\|A\|_2 = \sigma_1$.

15. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de A. Encontre a decomposição espectral de

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

9 Métodos Iterativos

1. Se $\|A\| < 1$, mostre que

   (a) $(I - A)$ é não-singular e $(I - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

   (b) $\dfrac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$.

2. Sejam A e B matrizes quadradas. Dizemos que B é *inversa aproximada* de A se $\|I - BA\| < 1$. Mostre que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|I - BA\|} \quad \text{e} \quad \|A^{-1} - B\| \leq \frac{\|B\| \, \|I - BA\|}{1 - \|I - BA\|}.$$

3. Sejam dois vetores u e v em $\mathbb{R}^n$. Investigue a norma da matriz $A = uv^T$. Faça experimentos no Octave, gerando vetores u e v, para diferentes valores de n, computando o posto de A (comando `rank`, no Octave), $\|u\|_2$, $\|v\|_2$ e $\|A\|_2$. O que você percebeu? Faça uma conjectura com base em seu experimento e tente demonstrá-la.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfazendo que

$$0 < \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Mostre que A é não-singular e que o método de Jacobi converge para $x_* = A^{-1}b$. (Dica: mostre que $\|M_{JAC}\|_\infty < 1$.)

5. Considere o sistema linear $Ax = b$. Dizemos que a iteração de Richardson *pré-condicionada* por B, uma matriz não-singular, é

$$x_{k+1} = (I - BA)x_k + Bb.$$

B é dita um pré-condicionador.

   (a) Encontre o pré-condicionador definido pelo método de Jacobi.
   (b) Encontre o pré-condicionador definido pelo método de Gauss-Seidel.
   (c) Encontre o pré-condicionador definido pelo método de Gauss-Seidel simétrico.
   (d) Encontre o pré-condicionador definido pelo método de SOR.

6. Se A é simétrica e definida positiva, mostre que o pré-condicionador do Gauss-Seidel simétrico é uma matriz simétrica e definida positiva.

7. Sejam B_k, inversas aproximadas de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tais que $\|(I - B_kA)\| \leq \lambda < 1$, para $k = 0, 1, \ldots$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que a iteração

$$x_{k+1} = x_k + B_k r_k, \qquad \text{onde} \qquad r_k = b - Ax_k,$$

converge para a solução do sistema linear $Ax = b$.

8. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) É possível garantir a convergência do Método de Jacobi para esse sistema?
   (b) Realize três iterações do Método de Jacobi, a partir de $x^0 = (1, 1, 1)^T$. Calcule o resíduo em cada iteração. O que você observou?
   (c) Explicite a matriz de iteração do método de Jacobi.
   (d) Explique o comportamento observado através da análise da matriz de iteração do método.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que A é uma matriz simétrica e definida positiva.

(b) A matriz A satisfaz o critério da linhas para a convergência do método de Jacobi? E sobre os métodos de Gauss-Seidel e SOR? Podemos afirmar que estes métodos vão gerar sequências convergentes?

(c) Se o método de Gauss-Seidel for convergente neste caso, utilize-o para resolver $Ax = b$, com $b = (1, 3, 7)^T$.

(d) Faça experimentos numéricos para estimar qual seria o valor ótimo de ω no método de SOR para esta matriz. Utilize como critério de parada $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty < 10^{-10}$ e número de iterações limitado a 100.

10. Para $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$.

(a) Compute $\|B_J\|_1$, $\|B_J\|_2$, $\|B_J\|_\infty$, $\|B_{GS}\|_1$, $\|B_{GS}\|_2$, $\|B_{GS}\|_\infty$.

(b) Usando o Octave, determine o raio espectral de B_J e B_{GS}.

(c) Com base nos itens anteriores, é possível afirmar que algum dos dois métodos será convergente?

11. Seja $R = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Considere a equação de Laplace em 2D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x, y < 1,$$

com a condição de contorno $u = g(x, y)$, para $(x, y) \in \partial R$, com

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \sin(\pi x), & y = 1 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Este problema tem como solução analítica

$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \sin(\pi x) \sinh(\pi y).$$

(a) Discretize a equação diferencial parcial, usando o método de diferenças finitas e explicite o sistema linear resultante.

(b) Resolva o sistema linear usando cada um dos métodos iterativos vistos.

10 Métodos Iterativos para Sistemas Não-Lineares

1. Considere o sistema não-linear formado por $e^y - x = 1$ e $x^2 - y = 0$.

(a) Verifique que $(0, 0)^T$ é solução do sistema e que as condições usuais para a aplicação do método de Newton são verificadas.

(b) Partindo de $(1/2, 1/2)^T$, itere o método de Newton até que a norma do resíduo seja inferior à 10^{-4}.

(c) Repita o ítem acima, porém utilizando o método das cordas.

(d) Observe o comportamento do resíduo para o método de Newton e das cordas e verifique a taxa de convergência.

2. Repita o exercício anterior para o sistema não-linear formado por $e^y - x = 1$ e $x^3 - xy = 0$. O que aconteceu de diferente? Explique.