

Lista VII

1. Resolva graficamente o problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2 - xy + y^2 - 3x \\ \text{s.a} & x + y \leq 4, \quad x, y \geq 0. \end{array}$$

Usando um método de restrições ativas a partir do ponto $x^0 = (0, 0)^T$.

2. Considere o problema de maximizar

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f(x, y) = xy \\ \text{s.a} & x + y \geq 1 \quad x + 2y \leq 2. \end{array}$$

Aplique o método das restrições ativas algébrica e geometricamente, a partir de

(a) $(1, 0)^T$

(b) $(2, 0)^T$

(c) $(0, 1)^T$

3. Resolva algébrica e graficamente o problema de abaixo pelo método de restrições ativas, tomando como ponto inicial $(2, 1)^T$ e justificando todos os passos.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \\ \text{s.a} & \begin{cases} x + y \geq 1, \\ x + y \leq 3, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

4. Aplique o método de restrições ativas para resolver

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2 + xy + 2y^2 - 6x - 2y - 12z \\ \text{s.a} & \begin{cases} x + y + z = 2, \\ -x + 2y \leq 3, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

5. Considere o problema

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \\ \text{s.a} \quad & \begin{cases} e^T x = 1, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Com $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j \in C^1$, $j = 1, \dots, n$ e $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Prove que $\tilde{x}$ é a solução do problema de acima, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} f'_j(\tilde{x}_j) &= \alpha \quad \text{se } \tilde{x}_j > 0 \\ f'_j(\tilde{x}_j) &\geq \alpha \quad \text{se } \tilde{x}_j = 0 \end{aligned}$$

6. Considere o problema de programação quadrática

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b. \end{aligned}$$

onde $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. geometricamente

- (a) Escreva as condições de otimalidade de segunda ordem;
- (b) Para $H = I$ e $c = 0$, interprete esse problema