DMA – IMECC – UNICAMP
MS629- Programação não linear   Prof. ROBERTO ANDREANI   Sala 133

Lista VI

1. Considere o problema de
$$\text{minimizar} \quad 2x^1 + 3x_2$$
$$\text{sujeita a} \quad x_1 + x_2 \leq 8, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

   (a) Escreva as condições de otimalidade;

   (b) Para cada ponto extremo verifique se as condições de otimalidade são satisfeitas. Encontre a solução ótima.

2. Seja o problema
$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{s.a.} \quad Ax \leq b.$$
.
Com $f : I\!R^n \to I\!R$, $A \in I\!R^{m \times n}$, $b \in I\!R^m$, $m < n$ .Considere o sistema não linear (S)
$$\nabla f(x) + A^T \mu = 0$$
$$(a_i^T x - b_i)\mu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$
Onde $A^T = [a_1, \ldots, a_m]$Qual é a relação entre as soluções de (P) e de (S).

3. Resolva o problema de otimização
$$\text{Minimizar} \quad f(x, y) \text{ s.a.} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$
Com $f(x, y) = g(x) - x^2 + y^2$ onde $g(x)$ é o valor ótimo da função objetivo do seguinte problema
$$Min \;\; u^2 + v^2$$
$$s.a \;\; u + 2v \geq x, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

4. Considere o seguinte problema canalizado
$$Min \;\; f(x)$$
$$s.a \;\; a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$
seja x um ponto fativel e $g = \nabla f(x)$ seja d a direção definida por
$$d_i = \begin{cases} 0 & se \;\; \{x_i = a_i, e \;\; g_i \geq 0\} \;\; ou \;\; \{x_i = a_i, \;\; e \;\; g_i \leq 0\} \\ -g_i, & caso \;\; contrario \end{cases}$$

(a) Prove que d é uma direção fativel de descida em x se $\nabla f(x) \neq 0$

(b) Prove que $d = 0$ se e somente se x satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem

(c) Usando essa direção e $x^0 = (0,3)^T$ Ache a solução do seguinte problema.

$$\begin{aligned} Min \;\; & x^2 + y^2 \\ s.a \;\; & 0 \leq x \leq 4, \;\; 1 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

5. Considere o problema

$$\begin{aligned} Min \;\; & f(x) \\ s.a \;\; & a_1^T x \leq b_1, \;\; a_2^T x \leq b_2. \end{aligned}$$

Suponha que as duas restrições são ativas em $\tilde{x}$ e que $\nabla f(\tilde{x})$ e combinação linear positiva de a_1 e a_2. Construa duas direções factíveis e de descida diferentes em $\tilde{x}$. Justifique !.

6. Considere os problemas primal e dual de programação linear.

$$\begin{array}{llll} Primal & Minimizar \;\; c^T x & Dual & Maximizar \;\; b^T y \\ & Ax = b & & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & \end{array}$$

Seja $\tilde{x}$ solução do primal

(a) Prove que $b^T y \leq c^T x$ para quasquer x e y factíveis;

(b) Prove que o vetor de multiplicadores de Lagrange $\tilde{\lambda}$ associado as restrições de igualdade em $\tilde{x}$ é solução ótima do dual;

(c) Prove que $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{\lambda}$.

7. Considere o problema de programação quadrática

$$\begin{aligned} Min \;\; & f(x) = \frac{1}{2} x^T B x + c^T x \\ s.a \;\; & Ax = b, \;\; x \geq 0. \end{aligned}$$

Seja $\tilde{x}$ uma solução regular do problema, e $\tilde{x}$ o vetor de multiplicadores de Lagrange associado às restrições de igualdade. Prove que

$$f(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(c^T \tilde{x} + b^T \tilde{\lambda})$$

8. Resolva o seguinte problema de otimização

$$Max \;\; P(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$
$$s.a \;\; \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = c, \\ x_i \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Deduza a seguinte desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

9. Suponha que $S = \{x \in I\!R^n \;\mid\; Ax = b, \;\; x \geq 0\}$ é não vazio, onde $A \in I\!R^{m \times n}$ e $b \in I\!R^m$. Seja $0 \leq z \in I\!R^n$ tal que $A^T(Ax - b) = \gamma \geq 0$ é $z^T\gamma = 0$ Prove que $Az = b$.