DMA – IMECC – UNICAMP
MS629- Programação não linear Prof. ROBERTO ANDREANI Sala 133

Lista V

1. Os seguinte problemas consistem em minimizar f sujeita a $Ax = b$ onde $A \in I\!R^{m\times n}$ e $b \in I\!R^m$. para cada um deles

   (i) Encontre uma base do $\mathcal{N}u(A)$;

   (ii) Construa uma parametrização que caracterize o conjunto factível

   (iii) Transforme o problema em outro equivalente sem restrições

   (iv) Escreva condições de primiera e segunda ordem para os dois problemas equivalentes

   (a) Minimizar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$ s.a. $2x_1 + x_2 = 4$, $5x_1 - x_3 = 8$

   (b) Minimizar $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_1x_2$ s.a. $2x_1 + x_2 = 1$.

2. Considere uma função $f : I\!R to I\!R$, $f(x, y) = xy$.

   (a) Analise os pontos estacionários do problema

   (b) Acrescente a restrição $x + y = 0$. Analise as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem.

   (c) Resolva (b) para a restrição $x - y = 0$.

   (d) Analise (a), (b) e (c). Que conclusões pode ser tiradas ?

3. Encontre o ponto sobre o plano $x+2y+2z = 4$, cuja distancia ao origem é minima.

4. Seja $f(x) = \|x\|$ com $x \in I\!R^n$ Considere o problema de minimizar f sujeita a $Ax = b$ com $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^m$, $m < n$ e $postode(A) = m$. Prove que a solução $\tilde{x}$ desse problema pode ser escrita com $\tilde{x} = \tilde{A}b$ onde $\tilde{A} \in I\!R^{n\times m}$e $A\tilde{A} = I$.

5. Seja $f : I\!R^n \to I\!R$ com $f \in C^2$. Seja $\tilde{x} \in I\!R^n$ tal que $A\tilde{x} = b$ com $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^m$), e tal que existe $\lambda \in I\!R^m$ com $\nabla f(\tilde{x}) = A^T\lambda$ e $\nabla^2 f(\tilde{x})$ definida positiva. O Ponto $\tilde{x}$ e um minimizador local de f sujeita a $Ax = b$?. Prove ou dê um contraexemplo.

6. Considere o problema
$$\text{Minimizar } \tfrac{1}{2}x^TQx + p^Tx + q \quad \text{s.a.} \quad Ax = b.$$
Onde $Q \in I\!R^{n\times n}$ é simétrica, $x, p \in I\!R^n$, $q \in I\!R$ $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^m$. Seja Z uma base de $\mathcal{N}u(A)$ e suponha que Z^TQZ é definida positiva. Seja x_0 tal que $Ax_0 = b$. Prove que a solução e x é dada por $x = x_0 - Z(Z^TQZ)?Z^T(Qx_0 + p)$.

7. Seja o problema

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{s.a.} \quad Ax = b.$$

Onde $f : I\!R^n \to I\!R$, $f \in C^1$, $A \in Rm \times n$, $b \in I\!R^m$, $m < n$ e posto $A = m$. Seja p a solução de

$$\text{Minimizar} \quad \|\nabla f(x) - p\| \quad \text{s.a.} \quad Ap = 0.$$

Encontre p e interprete geometricamente.

8. Considere o problema de

$$\text{minimizar} \quad x^2 + 3y^2 + 2z^2, \quad \text{sujeita a} \quad x + 2y + 3z = 6.$$

Seja $x_0 = (1, 1, 1)$. Resolva o problema aplicando o método de Newton ao problema reduzido e verificando que x_1 satisfaz as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem.

9. Considere o problema quadrático

$$\text{Minimizar} \quad \tfrac{1}{2}x^T Qx - c^T x \quad \text{s.a.} \quad Ax = b.$$

Onde $Q \in I\!R^{n\times n}$ é simétrica, $c \in I\!R^n$, $A \in I\!R^{m\times n}$ e $b \in I\!R^m$. Prove que x é um minimizador local se e somente se x é um minimizador global. (Note que não há nenhuma hipótese sobre Q.)

10. Seja o problema

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{s.a.} \quad Ax = b.$$

.

Com $f : I\!R^n \to I\!R$, $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^m$, $m < n$ e posto $A = m$. Sejam $\tilde{x} \in I\!R^n$ tal que $A\tilde{x} = b$, $g = \nabla f(\tilde{x}) \neq 0$. Seja $d \in I\!R^n$ tal que $\nabla^T f(\tilde{x})d < 0$.

Sejam $\tilde{g}$ e $\tilde{d}$ são projeções de g e d sobre Nu(A), respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(a) $\tilde{d}^T \tilde{g} < 0$

(b) Existem $\tilde{d}$ e $\tilde{g}$ tais que $\tilde{d}^T \tilde{g} \geq 0$

Qual das duas afirmações é verdadeira?, Prove ou dê um contra-exemplo.

11. Considere o seguinte problema

$$\text{Minimizar} \quad x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a.} \quad x_1 + x_2 = 1$$

(a) Encontre a solução ótima x^*

(b) Considere o problema penalizado Minimizar $x_1^2 + +x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 1)^2$. Para cada $\mu > 0$, calcule a solução ótima $\tilde{x}(\mu)$

(c) Verifique que $\lim_{\mu\to\infty} \ \tilde{x}(\mu) = x^*$

(d) Repita (a), (b) e (c) trocando a função objetivo por $x_1^3 + x_2^3$

(e) Analise os resultados obtidos.

12. Seja $z^11 = (1, -1, 2)^T$. Escolha $z^2 \in I\!R^3$ tal que z^2 e z^2 sejam linearmente independentes. Considere $Z = [z^1 z^2]$ uma base de $\mathcal{N}$u(A) com $A \in I\!R^{m \times n}$.

   (a) Determine m e n;

   (b) Encontre A. É única ?

   (c) Ache as equações da variedade afim paralela a $\mathcal{N}$u(A) que passa pelo ponto $(2, 5, 1)^T$;

   (d) Se S a variedade em (c) e $tildex$ é a solução de minimizar f sujeita a $x \in S$, onde $f : I\!R^n \to I\!R$, qual é a relação entre Z e f no ponto $\tilde{x}$?

13. Considere o problema de minimizar $\frac{1}{2}x^T t(x - 2c)$ sujeita a $Ax = b$, onde $c \in I\!R^n$, $A \in I\!R^{m \times n}$, $b \in I\!R^m$, $m \leq n$ e $postoA = m$. Seja P a matriz de projeção sobre o Núcleo de A. Seja $\tilde{x}$ uma solução do problema. Prove que $P\tilde{x} = Pc$. Interprete geometricamente em $I\!R^2$.

14. Considere o problema (P) Minimizar $\frac{1}{2}x^T Bx + c^T x$ sujeita a $Ax = b$, onde $\{x \in I\!R^n | Ax = b\}$ é não vazio e B é simétrica.

   (a) Prove que se (P) tem solução, então $z^T Bz \geq 0$ para todo $z \in \mathcal{N}u(A)$;

   (b) Prove que (P) tem solução única se e somente se $z^T Bz > 0$ para todo $z \in \mathcal{N}u(A)$, $z \neq 0$;

   (c) Mostre com um exemplo que (a) é condição necessaria de otimalidade mas não é suficiente.

15. Seja B uma matriz simétrica. Dizemos que $B \succeq 0$ em $\mathcal{N}u(A)$ se $z^T Bz \geq 0$ para todo $z \in \mathcal{N}u(A)$ e que $B \succ 0$ em $\mathcal{N}u(A)$ se $z^B z > 0$ para todo $z \in \mathcal{N}u(a)$, $z \neq 0$

   (a) Prove que se existe $r \in I\!R$ tal que $B + rA^T A \succ 0$, então $B \succ 0$ em $\mathcal{N}u(A)$;

   (b) Prove que se existe $r \in I\!R$ tal que $B + rA^T A \succeq 0$, então $B \succeq 0$ em $\mathcal{N}u(A)$;

   (c) Prove que se $B \succ 0$ em $\mathcal{N}u(A)$, então existe $r \in I\!R$ tal que $B + rA^T A \succ 0$,

   (d) Através de um exemplo mostre que a reciproca de (b) não é verdadeira.;

16. Relacione os exercícios 7 e 8 com a resolução do problema

$$Minimizar \;\; \frac{1}{2}x^T Bx + c^T x + r\|Ax - b\|^2$$

17. Considere o problema de minimizar $\frac{1}{2}x^T Lx$ sujeita a $Ax = b$ onde $L \in I\!R^{n \times n}$ simétrica, $A \in I\!R^{m \times n}$, $m < n$ e posto A = m.

   (a) Escreva as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem;

   (b) Suponha que são válidas as condições suficientes em (a) e encontre a solução.